

## 4. RÓWNANIA EULERA W PRZESTRZENI CZTEROWYMIAROWEJ

Rozdział należy do teorii pt. "Teoria Przestrzeni"  
autorstwa

Dariusza Stanisława Sobolewskiego.

Http: [www.htsengines.com](http://www.htsengines.com)

http: [www.theoryofspace.info](http://www.theoryofspace.info)

E-mail: [info@htsengines.com](mailto:info@htsengines.com)

© All rights reserved.

## 4.1 RÓWNANIA EULERA W PRZESTRZENI CZTEROWYMIAROWEJ

W niniejszym rozdziale powtórzmy znane obliczenia wykonane jeszcze przez Poissona transformacji prędkości punktów przestrzeni z układu  $\Theta$  do  $\Theta'$  mając na uwadze przestrzeń czterowymiarową.

Jednakże prezentowane obliczenia różnią się znacząco od obecnie istniejących z uwagi na to, że w sposób ścisły wprowadzają formy różniczkowe, określone na rozmaitości różniczkowej, związane z obrotami dowolnej grupy  $SO(n)$  uwypuklając przy tym ich hiperpowierzchnie niezmiennicze.

Rozważmy podzbiór  $U$  rozmaitości różniczkowej przestrzeni fizycznej  $M^{\text{Re}}$  zanurzonej w czterowymiarowej przestrzeni Euklidesa  $E^4$ . Przy czym, w dalszej części rozdziału założymy, że mapą podzbioru  $U$  jest odwzorowanie identycznościowe z podzbioru przestrzeni  $U \subset E^4$  na  $U$ .

W układzie  $\Theta$  mamy wyróżniony punkt  $P_0$  i bazę ortonormalną  $\{e_i : i = 1, 2, 3, 4\}$  a w układzie  $\Theta'$  punkt  $P'_0$  i bazę ortonormalną  $\{e'_i : i = 1, 2, 3, 4\}$ . Na rysunku poniżej przedstawiono oba układy współrzędnych oraz promienie wodzące punktu materialnego  $P$ . Wersory orientacji przestrzeni lustrzanej  $\alpha$  i  $\beta$  oznaczono przez  ${}^\alpha \hat{n}_i$  i  ${}^\beta \hat{n}_i$ .

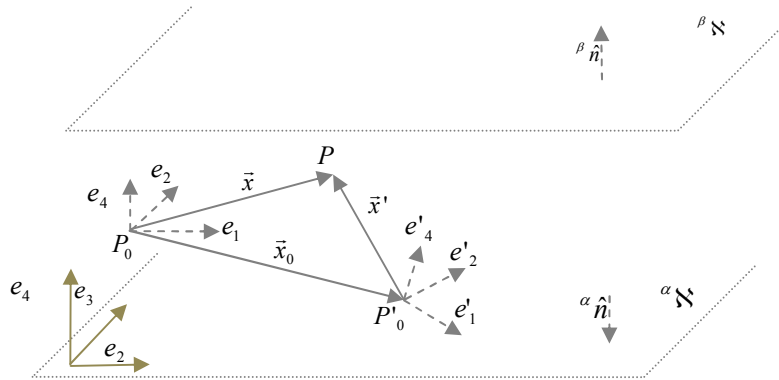


FIG. 1

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{x}_0 + \bar{x}) = v_0 + \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^4 x'_i e'_i \right) \frac{dt'}{dt} = v_0 + \sum_{i=1}^4 \frac{dx'_i}{dt'} e'_i + \sum_{i=1}^4 x'_i \frac{de'_i}{dt'} \quad (1)$$

Rozkładając wielkość  $\frac{de'_i}{dt'}$  w bazie  $\{e'_i : i = 1, 2, 3, 4\}$  mamy:

$$\frac{de'_i}{dt'} = \sum_{j=1}^4 A'_j e'_j = {}^*T (A'_1 e'_2 \wedge e'_3 \wedge e'_4 + A'_2 e'_4 \wedge e'_3 \wedge e'_1 + A'_3 e'_4 \wedge e'_1 \wedge e'_2 + A'_4 e'_2 \wedge e'_1 \wedge e'_3) \quad (2)$$

, gdzie  $A_k^i$ :

$$A_k^i = \left( e'_k \mid \frac{de'_i}{dt} \right) \quad (3)$$

, oraz  $*^T$  izomorfizm pomiędzy  $n$  wymiarową przestrzenią wektorową  $E^n$  a przestrzenią  $\binom{n}{n-1}$  wymiarową  $\wedge^{n-1} E^n$  iloczynów zewnętrznych  $n-1$  wektorów.

W ogólnym przypadku izomorfizm  $*^T$  pomiędzy przestrzenią liniową  $k$  iloczynów zewnętrznych  $\wedge^k E^n$  a przestrzenią liniową  $n-k$  iloczynów zewnętrznych  $\wedge^{n-k} E^n$

$$*^T (e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \varepsilon_{i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k} i_1 i_2 \dots i_k} e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge e_{i_{n-k}} \quad (4)$$

W szczególności dla przestrzeni czterowymiarowej mamy:

$$\begin{aligned} *^T (e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) &= e_1 \\ *^T (e_4 \wedge e_3 \wedge e_1) &= e_2 \\ *^T (e_4 \wedge e_1 \wedge e_2) &= e_3 \\ *^T (e_2 \wedge e_1 \wedge e_3) &= e_4 \end{aligned} \quad (5)$$

Zatem, przyjmując oznaczenia:

$$\begin{aligned} e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 &= e_1 \\ e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 &= e_2 \\ e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 &= e_3 \\ e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 &= e_4 \end{aligned} \quad (6)$$

, mamy:

$$*^T : \sum_{i=1}^n x_i e_i \rightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (7)$$

, gdzie  $n=4$ ,  $\vec{x} \in E^n$ ,  $e_i = \underbrace{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \dots \wedge e_{i_{n-1}}}_{n-1}$

, lub ogólniej

$$*^T \xi = \sum_{i=1}^n x_i *^T e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (8)$$

Wyjaśnijmy, że operator  $*^T$  nie jest operatorem Hodgea, ponieważ różni się od niego nieznacznie definicją. Definicja operatora Hodgea:

$$*(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k}} e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge e_{i_{n-k}} \quad (9)$$

Zatem operatory te różnią się znakiem:

$$*(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = (-1)^{k(n-k)} *^T(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) \quad (10)$$

Operator  $*^T$  nazwiemy operatorem transponowanym gwiazdki Hodgea.

Operator  $*^T$  ma następujące właściwości:

$$\begin{aligned} *^T *^T(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) &= *^T \varepsilon_{i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k} i_{k+1}} e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge e_{i_{n-k}} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \\ *^T *^T &= (-1)^{k(n-k)} Id \\ (*^T)^{-1}(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) &= \varepsilon_{i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k} i_{k+1}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = *(e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge e_{i_{n-k}}) = \\ &= (-1)^{k(n-k)} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \\ (*^T)^{-1} &= * \\ *^T *(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) &= *^T \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \varepsilon^2_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \\ *^T * &= *^T = Id \quad (11) \\ (*^T)^{-1} *(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) &= (*^T)^{-1} \varepsilon_{i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k} i_{k+1}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k}} e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge e_{i_{n-k}} = \\ &= (-1)^{k(n-k)} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \\ (*^T)^{-1} * &= (-1)^{k(n-k)} Id \\ (*^T)^{-1} *^{-1}(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) &= (*^T)^{-1} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \varepsilon^2_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \\ (*^T)^{-1} *^{-1} &= *^{-1} (*^T)^{-1} = Id \end{aligned}$$

Korzystając z ortonormalności wersorów  $\{e'_i : i = 1, 2, 3, 4\}$  mamy:

$$(e'_i | e'_j) = \delta_{ij} \quad (12)$$

, zatem różniczkując względem czasu w układzie  $\Theta$  otrzymujemy:

$$\left( \frac{de'_i}{dt'} | e'_j \right) + \left( e'_i | \frac{de'_j}{dt'} \right) = 0 \quad (13)$$

, z której wynika, że  $\frac{de'_i}{dt'}$  jest ortogonalny do  $e'_i$ .

Zatem:

$$\begin{aligned} * \frac{d\hat{e}_i}{dt} &= A e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \frac{1}{2} e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 + \frac{1}{2} e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 + \frac{1}{2} e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = \\ &= \left( e_1 | \frac{d\hat{e}_1}{dt} \right) e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \left( e_2 | \frac{d\hat{e}_1}{dt} \right) e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 + \left( e_3 | \frac{d\hat{e}_1}{dt} \right) e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 + \left( e_4 | \frac{d\hat{e}_1}{dt} \right) e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = \\ &= \left( e_2 | \frac{d\hat{e}_1}{dt} \right) e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 - \left( e_1 | \frac{d\hat{e}_3}{dt} \right) e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 + \left( e_4 | \frac{d\hat{e}_1}{dt} \right) e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = \\ &= \left( e_2 | \frac{d\hat{e}_1}{dt} \right) e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 + \left( e_1 | \frac{d\hat{e}_3}{dt} \right) e_4 \wedge e_2 \wedge e_1 + \left( e_4 | \frac{d\hat{e}_1}{dt} \right) e_3 \wedge e_2 \wedge e_1 = \\ &= \left( \left( e_2 | \frac{d\hat{e}_3}{dt} \right) e_1 \wedge e_4 + \left( e_3 | \frac{d\hat{e}_1}{dt} \right) e_1 \wedge e_2 + \left( e_4 | \frac{d\hat{e}_2}{dt} \right) e_1 \wedge e_3 + \left( e_2 | \frac{d\hat{e}_1}{dt} \right) e_4 \wedge e_3 + \left( e_1 | \frac{d\hat{e}_3}{dt} \right) e_4 \wedge e_2 + \left( e_4 | \frac{d\hat{e}_1}{dt} \right) e_3 \wedge e_2 \right) \wedge e_1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
*\frac{de_2}{dt} &= A_1^2 e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + A_2^2 e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 + A_3^2 e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 + A_4^2 e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = \\
&= \left( e_1 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \left( e_2 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 + \left( e_3 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 + \left( e_4 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = \\
&= \left( e_1 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 - \left( e_2 \left| \frac{de_3}{dt} \right. \right) e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 + \left( e_4 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = \\
&= \left( e_1 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_3 \wedge e_4 \wedge e_2 + \left( e_2 \left| \frac{de_3}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_4 \wedge e_2 + \left( e_4 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 = \\
&\left( \left( e_1 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_3 \wedge e_4 + \left( e_2 \left| \frac{de_3}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_4 + \left( e_4 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_3 \right) \wedge e_2
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
*\frac{de_3}{dt} &= A_1^3 e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + A_2^3 e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 + A_3^3 e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 + A_4^3 e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = \\
&= \left( e_1 \left| \frac{de_3}{dt} \right. \right) e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \left( e_2 \left| \frac{de_3}{dt} \right. \right) e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 + \left( e_3 \left| \frac{de_3}{dt} \right. \right) e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 + \left( e_4 \left| \frac{de_3}{dt} \right. \right) e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = \\
&= \left( e_1 \left| \frac{de_3}{dt} \right. \right) e_4 \wedge e_2 \wedge e_3 + \left( e_2 \left| \frac{de_3}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_4 \wedge e_3 + \left( e_3 \left| \frac{de_4}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = \\
&\left( \left( e_1 \left| \frac{de_3}{dt} \right. \right) e_4 \wedge e_2 + \left( e_2 \left| \frac{de_3}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_4 + \left( e_3 \left| \frac{de_4}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_2 \right) \wedge e_3
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
*\frac{de_4}{dt} &= A_1^4 e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + A_2^4 e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 + A_3^4 e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 + A_4^4 e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = \\
&= \left( e_1 \left| \frac{de_4}{dt} \right. \right) e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \left( e_2 \left| \frac{de_4}{dt} \right. \right) e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 + \left( e_3 \left| \frac{de_4}{dt} \right. \right) e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 + \left( e_4 \left| \frac{de_4}{dt} \right. \right) e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = \\
&= \left( e_4 \left| \frac{de_1}{dt} \right. \right) e_3 \wedge e_2 \wedge e_4 + \left( e_4 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + \left( e_3 \left| \frac{de_4}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 = \\
&= \left( \left( e_4 \left| \frac{de_1}{dt} \right. \right) e_3 \wedge e_2 + \left( e_4 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_3 + \left( e_3 \left| \frac{de_4}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_2 \right) \wedge e_4
\end{aligned} \tag{17}$$

Powtarzający się dwuwektor nazwiemy prędkością kątową  $\omega$ , który zdefiniujemy następująco:

$$\begin{aligned}
\omega &:= \left( e_2 \left| \frac{de_3}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_4 + \left( e_3 \left| \frac{de_4}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_2 + \left( e_4 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_1 \wedge e_3 + \\
&+ \left( e_1 \left| \frac{de_2}{dt} \right. \right) e_3 \wedge e_4 + \left( e_3 \left| \frac{de_1}{dt} \right. \right) e_2 \wedge e_4 + \left( e_1 \left| \frac{de_4}{dt} \right. \right) e_2 \wedge e_3
\end{aligned} \tag{18}$$

Nie przypadkowo oznaczyliśmy prędkość kątową  $\omega$  jako formę różniczkową drugiego stopnia, określoną na wiązce stycznej  $TM^{\text{Re}}$  rozmaitości  $M^{\text{Re}}$  przestrzeni fizycznej czterowymiarowej ponieważ, w myśl definicji forma różniczkowa w punkcie  $q$  rozmaitości  $M^{\text{Re}}$  jest k –formą zewnętrzną określoną na przestrzeni stycznej  $TM_q^{\text{Re}}$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Zobacz uzupełnienia. Wyjaśniamy, że przejście od wektorów do form liniowych jest możliwe dzięki izomorfizmowi określonym przez iloczyn skalarny. Z kolei iloczyn skalarny może być zdefiniowany za pomocą metryki Riemanna na rozmaitości Reimanna.

Zatem równanie na prędkością kątową  $\omega$  możemy zapisać w uogólniony sposób, jako formę różniczkową drugiego stopnia określoną na rozmaiłości  $TM^4$  w postaci:

$$\begin{aligned} \omega(q) &:= \omega_{1,4}(q) dq_1 \wedge dq_4 + \omega_{1,2}(q) dq_1 \wedge dq_2 + \omega_{1,3}(q) dq_1 \wedge dq_3 + \\ &+ \omega_{3,4}(q) dq_3 \wedge dq_4 + \omega_{2,4}(q) dq_2 \wedge dq_4 + \omega_{2,3}(q) dq_2 \wedge dq_3 \\ \omega_{1,4}(q) &= \left( e'_2(q) \left| \frac{de'_3}{dt'}(q) \right. \right)^{def} = \omega_1(q) \\ \omega_{1,2}(q) &= \left( e'_3(q) \left| \frac{de'_4}{dt'}(q) \right. \right)^{def} = \omega_4(q) \\ \omega_{1,3}(q) &= \left( e'_4(q) \left| \frac{de'_2}{dt'}(q) \right. \right)^{def} = \omega_5(q) \\ \omega_{3,4}(q) &= \left( e'_1(q) \left| \frac{de'_2}{dt'}(q) \right. \right)^{def} = \omega_3(q) \\ \omega_{2,4}(q) &= \left( e'_3(q) \left| \frac{de'_1}{dt'}(q) \right. \right)^{def} = \omega_2(q) \\ \omega_{2,3}(q) &= \left( e'_1(q) \left| \frac{de'_4}{dt'}(q) \right. \right)^{def} = \omega_6(q) \end{aligned} \quad (19)$$

, gdzie  $q \in M^4$

Oznacza to, że będziemy korzystali z formy zewnętrznej i różniczkowej prędkości kątowej, co nie powinno prowadzić do nieporozumień. Przy czym

forma zewnętrzna równania jest określona na przestrzeni liniowej  $\binom{n}{n-2}$

wymiarowej  $\wedge^{n-2} E^n$  form zewnętrznych rzędu n-2 określonych na przestrzeni  $E^n$ .

Reasumując w przestrzeni fizycznej będącej n wymiarową rozmaiłością różniczkową  $n > 3$  prędkość kątowa jest formą różniczkową rzędu n-2 określoną na tej rozmaiłości.

Ostatecznie podstawiając do wzoru (1) otrzymujemy:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{x}'}{dt} + *^T \omega \wedge \vec{x}' \quad (20)$$

, oraz:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + *^T \omega \wedge \vec{x}' \quad (21)$$

W układzie współrzędnych  $\Theta^1$  będziemy zawsze analizowali tylko takie elementy<sup>2</sup>, dla których prędkość  $\vec{v}'$  jest równa zeru:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + *^T \omega \wedge \vec{x}' \quad (22)$$

Ogólniej w przestrzeni n wymiarowej mamy:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + *^T \omega \wedge \vec{x}' \quad (23)$$

<sup>2</sup> Tymi elementami są małe obszary przestrzeni.

, ale  $\vec{v}_0$  można zapisać jako:

$$\vec{v}_0 = *^T * \vec{v}_0 \quad (24)$$

Zatem podstawiając (24) do wzoru (23) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0 + *^T \omega \wedge \vec{x}' = *^T * \vec{v}_0 + *^T \omega \wedge \vec{x}' = \\ &= *^T \left( * \vec{v}_0 + \omega \wedge \vec{x}' \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Często będziemy opisywać przypadki, w których  $\vec{v}_0 = 0$ . Dla takich przypadków wzór (23) ma prostszą postać:

$$\vec{v} = *^T \omega \wedge \vec{x}' \quad (26)$$

Zauważmy, że dla każdego elementu  $\vec{x}'$  przestrzeni  $n$  wymiarowej  $\vec{x}' \in E^n$  mamy:

$$\omega \rightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} \equiv *^T \omega \wedge \vec{x}' \quad (27)$$

Zapiszmy wyniki działania izomorfizmu  $*^T$  na wersorach bazowych dwuwektorów z przestrzeni sześciowymiarowej  $e_i \in \wedge^2 E^4$ :

$$\begin{aligned} *^T \left( e_1 \wedge \sum_{i=1}^4 x_i e_i \right) &= *^T \left( e_1 \wedge e_4 \wedge \sum_{i=1}^4 x_i e_i \right) = -x_2 e_3 + x_3 e_2 \\ *^T \left( e_2 \wedge \sum_{i=1}^4 x_i e_i \right) &= *^T \left( e_2 \wedge e_4 \wedge \sum_{i=1}^4 x_i e_i \right) = x_1 e_3 - x_3 e_1 \\ *^T \left( e_3 \wedge \sum_{i=1}^4 x_i e_i \right) &= *^T \left( e_3 \wedge e_4 \wedge \sum_{i=1}^4 x_i e_i \right) = -x_1 e_2 + x_2 e_1 \\ *^T \left( e_4 \wedge \sum_{i=1}^4 x_i e_i \right) &= *^T \left( e_1 \wedge e_2 \wedge \sum_{i=1}^4 x_i e_i \right) = -x_3 e_4 + x_4 e_3 \\ *^T \left( e_5 \wedge \sum_{i=1}^4 x_i e_i \right) &= *^T \left( e_1 \wedge e_3 \wedge \sum_{i=1}^4 x_i e_i \right) = x_2 e_4 - x_4 e_2 \\ *^T \left( e_6 \wedge \sum_{i=1}^4 x_i e_i \right) &= *^T \left( e_2 \wedge e_3 \wedge \sum_{i=1}^4 x_i e_i \right) = -x_1 e_4 + x_4 e_1 \end{aligned} \quad (28)$$

Bazą przestrzeni dwuwektorów  $\wedge^2 E^4$  jest zbiór:  $\{e_1^2, e_2^2, e_3^2, e_4^2, e_5^2, e_6^2\}$

, gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} e_1^2 &\equiv e_1 \wedge e_4 \\ e_2^2 &\equiv e_2 \wedge e_4 \\ e_3^2 &\equiv e_3 \wedge e_4 \\ e_4^2 &\equiv e_1 \wedge e_2 \\ e_5^2 &\equiv e_1 \wedge e_3 \\ e_6^2 &\equiv e_2 \wedge e_3 \end{aligned} \quad (29)$$

W przestrzeni  $\wedge^{n-2} E^4$  wprowadźmy jeszcze strukturę euklidesową przyjmując następującą definicję iloczynu skalarnego:

$$\forall_{\vec{x} \in \wedge^{n-2} E^n \wedge \vec{y} \in \wedge^{n-2} E^n} (\vec{x} | \vec{y}) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} x_i y_i \quad (30)$$

, gdzie:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} x_i e_i^{n-2} \quad (31)$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} y_i e_i^{n-2}$$

Norma wyznaczona przez iloczyn skalarny ma postać:

$$\|\vec{x}\| = (\vec{x} | \vec{x}) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} x_i^2 \quad (32)$$



## 4.2 MOMENT PĘDU W PRZESTRZENI CZTEROWYMIAROWEJ

Przyjmujemy następującą definicję momentu pędu  $\overset{n-2}{J} \in \wedge^{n-2} E^n$ :

$$\overset{n-2}{J} \equiv * \sum_{i=1}^N \bar{x}_i \wedge m_i \bar{v}_i = * \sum_{i=1}^N m_i \bar{x}_i \wedge \bar{v}_i \quad (33)$$

Wykorzystując uprzednio uzyskane równania mamy:

$$\begin{aligned} \overset{n-2}{J} &= * \sum_{i=1}^N m_i \bar{x}_i \wedge \bar{v}_i = * \sum_{i=1}^N m_i (\bar{x}_0 + \bar{x}'_i) \wedge (\bar{v}_0 + *^T \overset{2}{\omega} \wedge \bar{x}'_i) = \\ &= * \sum_{i=1}^N m_i \bar{x}'_i \wedge \bar{v}_0 + * \sum_{i=1}^N m_i \bar{x}_0 \wedge *^T \overset{2}{\omega} \wedge \bar{x}'_i + * \sum_{i=1}^N m_i \bar{x}'_i \wedge *^T \overset{2}{\omega} \wedge \bar{x}'_i = \\ &= * M \bar{R} \wedge \bar{v}_0 + * M \bar{x}_0 \wedge *^T \overset{2}{\omega} \wedge \bar{R}' + * \sum_{i=1}^N m_i \bar{x}'_i \wedge *^T \overset{2}{\omega} \wedge \bar{x}'_i \end{aligned} \quad (34)$$

, gdzie przyjęto:

$$\begin{aligned} M &\equiv \sum_{i=1}^N m_i \\ \bar{R} &\equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \bar{x}_i \\ \bar{R}' &\equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \bar{x}'_i \end{aligned} \quad (35)$$

Zakładając, że wektory  $\bar{R}$  i  $\bar{v}_0$  są współosiowe,  $\bar{R}' = 0$  i przyjmując  $n = 4$  otrzymujemy wzór na moment pędu w postaci:

$$\overset{2}{J} = * \sum_{i=1}^N m_i \bar{x}'_i \wedge *^T \overset{2}{\omega} \wedge \bar{x}'_i \quad (36)$$

Wykorzystując wzory (28) obliczmy składowe momentu pędu  $\overset{2}{J}$  dla

$$\overset{2}{\omega} = \omega_1 e_1' \wedge e_2' \wedge e_3' \wedge e_4' \text{ i } \bar{x}'_i = x_{2,i}' e_2' + x_{3,i}' e_3' \text{ }^3:$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{J}_{1,4} &= * \sum_{i=1}^N m_i (x_{2,i}' e_2' + x_{3,i}' e_3') \wedge *^T \omega_1 e_1' \wedge (x_{2,i}' e_2' + x_{3,i}' e_3') = \\ &= * \sum_{i=1}^N m_i \omega_1 (x_{2,i}' e_2' + x_{3,i}' e_3') \wedge (-x_{2,i}' e_3' + x_{3,i}' e_2') = \\ &= * \sum_{i=1}^N m_i \omega_1 ((x_{2,i}')^2 + (x_{3,i}')^2) e_2' \wedge e_3' = \sum_{i=1}^N m_i \omega_1 ((x_{2,i}')^2 + (x_{3,i}')^2) e_1' \wedge e_4' \end{aligned} \quad (37)$$

<sup>3</sup> Odległość w kierunkach prostopadłych do osi obrotów.

Zauważmy, że lewa strona równania jest dwuwektorem, a po prawej stronie mamy również dwuwektor, którym jest prędkość kąтова.

Zatem można zapisać:

$$\overset{2}{J} := I \overset{2}{\omega} \quad (38)$$

, gdzie  $I$  jest symetrycznym operatorem liniowym (lub tensorem bezwładności) przeprowadzającym dwuwektor  $\overset{2}{\omega}$  w dwuwektor  $\overset{2}{J}$ .

Ogólniej w przestrzeni  $n$  wymiarowej mamy:

$$\overset{n-2}{J} := I \overset{n-2}{\omega} \quad (39)$$

W postaci macierzowej operator  $I$  w bazie  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  daje się zapisać

jako  $I_{i,j}$  gdzie  $i \in \left\{1, 2, \dots, \binom{n}{n-2}\right\} \equiv N_{n-2} \wedge j \in N_{n-2} = N_2$ .

Przy wprowadzonych oznaczeniach składowa momentu pędu  $\overset{2}{J}_i$  wyraża się za pomocą ogólnego wzoru:

$$\begin{aligned} \overset{2}{J} &= \sum_{i=1}^6 J_i \overset{2}{e}_i = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 I_{ij} \omega_j \overset{2}{e}_i \\ J_i &= \sum_{j=1}^6 I_{ij} \omega_j \end{aligned} \quad (40)$$

, albo ogólniej:

$$\begin{aligned} \overset{n-2}{J} &= \sum_{i=1}^{N_{n-2}} J_i \overset{n-2}{e}_i = \sum_{i=1}^{N_{n-2}} \sum_{j=1}^{N_{n-2}} I_{ij} \omega_j \overset{n-2}{e}_i \\ J_i &= \sum_{j=1}^{N_{n-2}} I_{ij} \omega_j \end{aligned} \quad (41)$$

Analogicznie do przypadku trójwymiarowego, dwuwektory bazy, w której operator  $I$  jest diagonalny będziemy nazywali płaszczyznami głównymi momentów bezwładności. Momenty bezwładności względem tych płaszczyzn nazwiemy głównymi momentami bezwładności i oznaczymy  $I_{N_{n-2}}$ .

Korzystając z wprowadzonego zapisu dla dwuwektorów bazy mamy dla prędkości kątowej:

$$\overset{2}{\omega} = \left( e_2 \left| \frac{de_3}{dt} \right| e_3 \right)^2 e_1 + \left( e_3 \left| \frac{de_1}{dt} \right| e_1 \right)^2 e_2 + \left( e_1 \left| \frac{de_2}{dt} \right| e_2 \right)^2 e_3 + \left( e_3 \left| \frac{de_4}{dt} \right| e_4 \right)^2 e_4 + \left( e_4 \left| \frac{de_2}{dt} \right| e_2 \right)^2 e_5 + \left( e_1 \left| \frac{de_4}{dt} \right| e_4 \right)^2 e_6 \quad (42)$$

Porównując prędkość kątową w przestrzeni czterowymiarowej z prędkością kątową w przestrzeni trójwymiarowej:

$$\vec{\omega} = \left( e_3 \mid \frac{de_2}{dt} \right) e_1 + \left( e_1 \mid \frac{de_3}{dt} \right) e_2 + \left( e_2 \mid \frac{de_1}{dt} \right) e_3 \quad (43)$$

, stwierdzamy, że odpowiednie składowe dwuwektora  $\omega$  prędkości kątowej mogą być utożsamiane ze składowymi wektora prędkości. Bezpośrednio z wzorów (42) i (43) otrzymujemy:

$$\omega = -\omega_1 e_1^2 - \omega_2 e_2^2 - \omega_3 e_3^2 + \left( e_3 \mid \frac{de_4}{dt} \right) e_4^2 + \left( e_4 \mid \frac{de_2}{dt} \right) e_5^2 + \left( e_1 \mid \frac{de_4}{dt} \right) e_6^2 \quad (44)$$

, oraz:

$$\omega = -\omega_1 e_1^2 - \omega_2 e_2^2 - \omega_3 e_3^2 + \omega_4 e_4^2 + \omega_5 e_5^2 + \omega_6 e_6^2 \quad (45)$$

, gdzie:

$$\begin{aligned} \omega_4 &= \left( e_3 \mid \frac{de_4}{dt} \right) \\ \omega_5 &= \left( e_4 \mid \frac{de_2}{dt} \right) \\ \omega_6 &= \left( e_1 \mid \frac{de_4}{dt} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

Zatem z wzoru (45) wynika, że składowe dwuwektora prędkości są obrotami w płaszczyznach rozpiętych na dopełnieniach dwuwektorów bazowych. Rozważmy, jako przykład składową  $e_1^2$  dwuwektora prędkości  $\omega$ , którą jak wynika ze wzoru (45) jest  $-\omega_1$ . Oznacza to, że mamy do czynienia z obrotami w płaszczyźnie rozpiętej na wektorach  $L(e_2, e_3)$ . Podprzestrzenią niezmienniczą tych obrotów jest podprzestrzeń rozpięta na wektorach  $L(e_1, e_4)$ , czyli tych samych, które tworzą dwuwektor bazowy  $e_1^2$  podprzestrzeni  $\wedge^{n-2} E^n$ , gdzie  $n = 4$ .

Porównując z kolei momenty bezwładności  $I_i$  z ich odpowiednikami trójwymiarowymi, będziemy mieli:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{1,1} = I_{14,14} = I_1^{(3d)} \\ I_2 &= I_{24,24} = I_2^{(3d)} \\ I_3 &= I_{34,34} = I_3^{(3d)} \end{aligned} \quad (47)$$

Zatem moment pędu w płaszczyznach głównych  $\left\{ e'_{N_{n-2}} \right\}$  momentu

bezwładności ma postać:

$$\begin{aligned} J &= I \omega = \\ &= -I_1 \omega_1 e_1^2 - I_2 \omega_2 e_2^2 - I_3 \omega_3 e_3^2 + I_4 \omega_4 e_4^2 + I_5 \omega_5 e_5^2 + I_6 \omega_6 e_6^2 \end{aligned} \quad (48)$$

Jeżeli moment pędu jest dwuwektorem, to jego pochodna po czasie utożsamiana z momentem siły jest również dwuwektorem:

$$\frac{d^2 J}{dt} = D^2 \quad (49)$$

Ogólniej dla przestrzeni  $n$  wymiarowej:

$$\frac{d^{n-2} J}{dt} = D^{n-2} \quad (50)$$

Aby obliczyć pochodną po czasie dwuwektora przy przejściu do układu  $\Theta'$  wykorzystamy wzór (20), który po podstawieniu  $P_0 = P'_0$  przybiera postać:

$$\left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right)_{\{e_1, e_2, e_3, e_4\}} = \left( \frac{d\vec{x}'}{dt} + {}^*T \omega \wedge \vec{x} \right)_{\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}} \quad (51)$$

Transformacja pochodnej po czasie dwuwektora  $u^2$  do układu  $\Theta'$  ma postać:

$$\frac{d^2 u}{dt} = \frac{d \left( \sum_{i=1}^6 u'_i e'_i \right)}{dt} = \sum_{i=1}^6 \frac{d u'_i}{dt} e'_i + \sum_{i=1}^6 u'_i \frac{d e'_i}{dt} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{d e'_1}{dt} &= \frac{d(e'_1 \wedge e'_4)}{dt} = \frac{d e'_1}{dt} \wedge e'_4 + e'_1 \wedge \frac{d e'_4}{dt} = \\ &= {}^*T \left( \omega \wedge e'_1 \right) \wedge e'_4 + e'_1 \wedge {}^*T \left( \omega \wedge e'_4 \right) = \omega \wedge {}^* e'_1 \end{aligned} \quad (53)$$

, gdzie wprowadziliśmy nowy operator  $\wedge^*$ , który jest zdefiniowany następująco:

$$u \wedge^* (x \wedge y) \equiv {}^*T \left( u \wedge x \right) \wedge y + x \wedge {}^*T \left( u \wedge y \right) \quad (54)$$

, a ogólniej:

$$u \wedge^* (x \wedge y) \equiv {}^*T \left( u \wedge x \right) \wedge y + x \wedge {}^*T \left( u \wedge y \right) \quad (55)$$

Zatem podstawiając (53) do (52) otrzymujemy wzór transformacyjny dla pochodnej po czasie dwuwektora:

$$\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right)_{\Theta} = \left(\sum_{i=1}^6 \frac{d u'_i}{dt} e'^i + \omega \wedge^* u\right)_{\Theta'} \quad (56)$$

i ogólniej:

$$\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right)_{\Theta} = \left(\sum_{i=1}^{\binom{n-2}{2}} \frac{d u'_i}{dt} e'^i + \omega \wedge^* u\right)_{\Theta'} \quad (57)$$

Przechodząc do układu  $\Theta'$ , w którym operator  $\overset{2}{I}$  jest diagonalny, a jego składowe są stałe w czasie otrzymujemy z wzoru (49):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J}{dt^2} &= \frac{d(I \overset{2}{\omega})}{dt} = -I_1 \dot{\omega}_1 e'^2 - I_1 \omega_1 \overset{2}{\omega} \wedge^* e'^2 - I_2 \dot{\omega}_2 e'^2 + \\ &- I_2 \omega_2 \overset{2}{\omega} \wedge^* e'^2 - I_3 \dot{\omega}_3 e'^2 - I_3 \omega_3 \overset{2}{\omega} \wedge^* e'^2 + \\ &+ I_4 \dot{\omega}_4 e'^2 + I_4 \omega_4 \overset{2}{\omega} \wedge^* e'^2 + I_5 \dot{\omega}_5 e'^2 + \\ &+ I_5 \omega_5 \overset{2}{\omega} \wedge^* e'^2 + I_6 \dot{\omega}_6 e'^2 + I_6 \omega_6 \overset{2}{\omega} \wedge^* e'^2 \end{aligned} \quad (58)$$

, lub ogólniej:

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = \sum_{i=1}^{\binom{n-2}{2}} -I_i \dot{\omega}_i e'^i - I_i \omega_i \overset{n-2}{\omega} \wedge^* e'^i \quad (59)$$

Podstawiając za dwuwektor  $\overset{2}{\omega}$  w równaniu (56) wyrażenie z równania (18) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \overset{2}{\omega} \wedge^* e'^2 &= {}^{*T}((- \omega_1 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_2 e'_2 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3) \wedge e'_1) \wedge e'_4 + \\ &e'_1 \wedge {}^{*T}((- \omega_1 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_2 e'_2 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3) \wedge e'_4) = \\ &= -\omega_2 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_3 e'_2 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_3 - \omega_5 e'_1 \wedge e'_2 = -\omega_2 e'^2_3 + \omega_3 e'^2_2 + \omega_4 e'^2_5 - \omega_5 e'^2_4 \\ \overset{2}{\omega} \wedge^* e'^2 &= {}^{*T}((- \omega_1 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_2 e'_2 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3) \wedge e'_2) \wedge e'_4 + \\ &e'_2 \wedge {}^{*T}((- \omega_1 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_2 e'_2 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3) \wedge e'_4) = \\ &= \omega_4 e'_3 \wedge e'_4 - \omega_5 e'_1 \wedge e'_4 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_1 = \omega_4 e'^2_3 - \omega_5 e'^2_1 + \omega_6 e'^2_6 - \omega_6 e'^2_4 \\ \overset{2}{\omega} \wedge^* e'^2 &= {}^{*T}((- \omega_1 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_2 e'_2 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3) \wedge e'_3) \wedge e'_4 + \\ &e'_3 \wedge {}^{*T}((- \omega_1 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_2 e'_2 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3) \wedge e'_4) = \\ &= -\omega_1 e'^2_2 \wedge e'_4 + \omega_2 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_2 + \omega_6 e'_3 \wedge e'_1 = -\omega_1 e'^2_2 + \omega_2 e'^2_1 + \omega_3 e'^2_6 - \omega_6 e'^2_5 \\ \overset{2}{\omega} \wedge^* e'^2 &= {}^{*T}((- \omega_1 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_2 e'_2 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3) \wedge e'_1) \wedge e'_2 + \\ &e'_1 \wedge {}^{*T}((- \omega_1 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_2 e'_2 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3) \wedge e'_2) = \\ &= -\omega_2 e'_3 \wedge e'_2 - \omega_6 e'_4 \wedge e'_2 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_4 = \omega_2 e'^2_6 + \omega_6 e'^2_2 + \omega_4 e'^2_5 + \omega_5 e'^2_1 \\ \overset{2}{\omega} \wedge^* e'^2 &= {}^{*T}((- \omega_1 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_2 e'_2 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3) \wedge e'_1) \wedge e'_3 + \\ &e'_1 \wedge {}^{*T}((- \omega_1 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_2 e'_2 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3) \wedge e'_3) = \\ &= \omega_5 e'_2 \wedge e'_3 - \omega_6 e'_4 \wedge e'_3 - \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 - \omega_4 e'_1 \wedge e'_4 = \omega_5 e'^2_6 + \omega_6 e'^2_3 - \omega_4 e'^2_4 - \omega_4 e'^2_1 \\ \overset{2}{\omega} \wedge^* e'^2 &= {}^{*T}((- \omega_1 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_2 e'_2 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3) \wedge e'_2) \wedge e'_3 + \\ &e'_2 \wedge {}^{*T}((- \omega_1 e'_1 \wedge e'_4 - \omega_2 e'_2 \wedge e'_4 - \omega_3 e'_3 \wedge e'_4 + \omega_4 e'_1 \wedge e'_2 + \omega_5 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_6 e'_2 \wedge e'_3) \wedge e'_3) = \\ &= -\omega_3 e'_1 \wedge e'_3 + \omega_5 e'_4 \wedge e'_3 + \omega_2 e'_2 \wedge e'_1 - \omega_4 e'_2 \wedge e'_4 = -\omega_3 e'^2_5 - \omega_5 e'^2_3 - \omega_2 e'^2_4 - \omega_4 e'^2_2 \end{aligned} \quad (60)$$

Zatem ostatecznie:

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{dt} &= \frac{d(I\omega^2)}{dt} = -I_1\dot{\omega}_1 e_1^2 - I_1\omega_1(-\omega_2 e_3^2 + \omega_3 e_2^2 + \omega_4 e_5^2 - \omega_5 e_4^2) + \\
&- I_2\dot{\omega}_2 e_2^2 - I_2\omega_2(\omega_1 e_3^2 - \omega_3 e_1^2 + \omega_4 e_6^2 - \omega_6 e_4^2) + \\
&- I_3\dot{\omega}_3 e_3^2 - I_3\omega_3(-\omega_1 e_2^2 + \omega_2 e_1^2 + \omega_5 e_6^2 - \omega_6 e_5^2) + \\
&+ I_4\dot{\omega}_4 e_4^2 + I_4\omega_4(\omega_2 e_6^2 + \omega_6 e_2^2 + \omega_1 e_5^2 + \omega_5 e_1^2) + \\
&+ I_5\dot{\omega}_5 e_5^2 + I_5\omega_5(\omega_3 e_6^2 + \omega_6 e_3^2 - \omega_1 e_4^2 - \omega_4 e_1^2) + \\
&+ I_6\dot{\omega}_6 e_6^2 + I_6\omega_6(-\omega_3 e_5^2 - \omega_5 e_3^2 - \omega_2 e_4^2 - \omega_4 e_2^2) = \\
&+ \left(-I_1\dot{\omega}_1 + I_2\omega_2\omega_3 - I_3\omega_3\omega_2 + I_4\omega_4\omega_5 - I_5\omega_5\omega_4\right) e_1^2 + \\
&+ \left(-I_2\dot{\omega}_2 - I_1\omega_1\omega_3 + I_3\omega_3\omega_1 + I_4\omega_4\omega_6 - I_6\omega_6\omega_4\right) e_2^2 + \\
&+ \left(-I_3\dot{\omega}_3 + I_1\omega_1\omega_2 - I_2\omega_2\omega_1 + I_5\omega_5\omega_6 - I_6\omega_6\omega_5\right) e_3^2 + \\
&+ \left(I_4\dot{\omega}_4 + I_1\omega_1\omega_5 + I_2\omega_2\omega_6 - I_5\omega_5\omega_1 - I_6\omega_6\omega_2\right) e_4^2 + \\
&+ \left(I_5\dot{\omega}_5 - I_1\omega_1\omega_4 + I_3\omega_3\omega_6 + I_4\omega_4\omega_1 - I_6\omega_6\omega_3\right) e_5^2 + \\
&+ \left(I_6\dot{\omega}_6 - I_2\omega_2\omega_4 - I_3\omega_3\omega_5 + I_4\omega_4\omega_2 + I_5\omega_5\omega_3\right) e_6^2
\end{aligned} \tag{61}$$

Równania Eulera w przestrzeni czterowymiarowej mają więc postać:

$$\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + (I_4 - I_5)\omega_4\omega_5 - D_1 \\
I_2\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 + (I_4 - I_6)\omega_4\omega_6 - D_2 \\
I_3\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + (I_5 - I_6)\omega_5\omega_6 - D_3 \\
I_4\dot{\omega}_4 &= (I_5 - I_1)\omega_1\omega_5 + (I_6 - I_2)\omega_2\omega_6 + D_4 \\
I_5\dot{\omega}_5 &= (I_1 - I_4)\omega_1\omega_4 + (I_6 - I_3)\omega_3\omega_6 + D_5 \\
I_6\dot{\omega}_6 &= (I_2 - I_4)\omega_2\omega_4 + (I_3 - I_5)\omega_3\omega_5 + D_6
\end{aligned} \tag{62}$$

W przypadku, gdy wszystkie składowe momentu siły są równe zeru mamy mnożąc odpowiednio przez  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ :

$$\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1\omega_1 &= (I_2 - I_3)\omega_1\omega_2\omega_3 + (I_4 - I_5)\omega_1\omega_4\omega_5 \\
I_2\dot{\omega}_2\omega_2 &= (I_3 - I_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + (I_4 - I_6)\omega_2\omega_4\omega_6 \\
I_3\dot{\omega}_3\omega_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2\omega_3 + (I_5 - I_6)\omega_3\omega_5\omega_6 \\
I_4\dot{\omega}_4\omega_4 &= (I_5 - I_1)\omega_1\omega_4\omega_5 + (I_6 - I_2)\omega_2\omega_4\omega_6 \\
I_5\dot{\omega}_5\omega_5 &= (I_1 - I_4)\omega_1\omega_4\omega_5 + (I_6 - I_3)\omega_3\omega_5\omega_6 \\
I_6\dot{\omega}_6\omega_6 &= (I_2 - I_4)\omega_2\omega_4\omega_6 + (I_3 - I_5)\omega_3\omega_5\omega_6
\end{aligned} \tag{63}$$

$$I_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \omega_3 + I_4 \dot{\omega}_4 \omega_4 + I_5 \dot{\omega}_5 \omega_5 + I_6 \dot{\omega}_6 \omega_6 = \quad (64)$$

, co daje ostatecznie:

$$\frac{d}{dt} \left( I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 + I_4 \omega_4^2 + I_5 \omega_5^2 + I_6 \omega_6^2 \right) = 0 \quad (65)$$

Równanie to prowadzi do prawa zachowania energii kinetycznej kanałów przestrzennych:

$$\frac{J_1^2}{I_1} + \frac{J_2^2}{I_2} + \frac{J_3^2}{I_3} + \frac{J_4^2}{I_4} + \frac{J_5^2}{I_5} + \frac{J_6^2}{I_6} = const \quad (66)$$

Ogólniej:

$$\sum_{i=1}^{N_{m=2}} \frac{J_i^2}{I_i} = const \quad (67)$$

Mnożąc z kolei odpowiednio przez  $I_1 \omega_1, I_2 \omega_2, I_3 \omega_3, I_4 \omega_4, I_5 \omega_5, I_6 \omega_6$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I_1^2 \dot{\omega}_1 \omega_1 &= I_1 (I_2 - I_3) \omega_1 \omega_2 \omega_3 + I_1 (I_4 - I_5) \omega_1 \omega_4 \omega_5 \\ I_2^2 \dot{\omega}_2 \omega_2 &= I_2 (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_2 \omega_3 + I_2 (I_4 - I_6) \omega_2 \omega_4 \omega_6 \\ I_3^2 \dot{\omega}_3 \omega_3 &= I_3 (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \omega_3 + I_3 (I_5 - I_6) \omega_3 \omega_5 \omega_6 \\ I_4^2 \dot{\omega}_4 \omega_4 &= I_4 (I_5 - I_1) \omega_1 \omega_4 \omega_5 + I_4 (I_6 - I_2) \omega_2 \omega_4 \omega_6 \\ I_5^2 \dot{\omega}_5 \omega_5 &= I_5 (I_1 - I_4) \omega_1 \omega_4 \omega_5 + I_5 (I_6 - I_3) \omega_3 \omega_5 \omega_6 \\ I_6^2 \dot{\omega}_6 \omega_6 &= I_6 (I_2 - I_4) \omega_2 \omega_4 \omega_6 + I_6 (I_3 - I_5) \omega_3 \omega_5 \omega_6 \end{aligned} \quad (68)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$I_1^2 \dot{\omega}_1 \omega_1 + I_2^2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + I_3^2 \dot{\omega}_3 \omega_3 + I_4^2 \dot{\omega}_4 \omega_4 + I_5^2 \dot{\omega}_5 \omega_5 + I_6^2 \dot{\omega}_6 \omega_6 = 0 \quad (69)$$

, co daje

$$\frac{d}{dt} \left( I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 + I_4^2 \omega_4^2 + I_5^2 \omega_5^2 + I_6^2 \omega_6^2 \right) = 0 \quad (70)$$

Powyższe równanie prowadzi do prawa zachowania momentu pędu dla kanałów przestrzennych:

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + J_4^2 + J_5^2 + J_6^2 = const \quad (71)$$

, a ogólniej:

$$\sum_{i=1}^{N_{n-2}} J_i^2 = \text{const} \quad (72)$$



### 4.3 KANAŁ PRZESTRZENNY W SPOCZYNKU

Uwzględniając symetrię kanału przestrzennego, a właściwie zakładając, że kanał przestrzenny takową posiada przyjmujemy następujące równości:

$$I_{\bar{S}} \equiv I_1 = I_2 = I_3 \quad (73)$$

, oraz

$$I_{\bar{W}} \equiv I_4 = I_5 = I_6 \quad (74)$$

Podobne założenie zrobimy odnośnie odpowiednich prędkości kątowych:

$$\begin{aligned} \omega_{\bar{S}} &\equiv \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \\ \omega_{\bar{W}} &\equiv \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 \end{aligned} \quad (75)$$

Zatem bezpośrednio z wzoru (48) mamy uproszczony wzór na moment pędu kanału przestrzennego:

$$J = I \omega = -I_{\bar{S}} \omega_{\bar{S}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ e_1 + e_2 + e_3 \end{pmatrix} + I_{\bar{W}} \omega_{\bar{W}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ e_4 + e_5 + e_6 \end{pmatrix} \quad (76)$$

W przypadku kanału przestrzennego ortogonalnego do hiperpowierzchni brzegowych dodatkowo przyjmujemy, że:

$$\omega_{\bar{W}} = 0 \quad (77)$$

Po podstawieniu do wzoru na moment pędu otrzymujemy:

$$J = I \omega = -I_{\bar{S}} \omega_{\bar{S}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ e_1 + e_2 + e_3 \end{pmatrix} \quad (78)$$

Interesujący jest przypadek, w którym kanał przestrzenny będący w spoczynku ma tylko i wyłącznie jedną składową momentu pędu na przykład składową  $e_1 \wedge e_4$ :

$$J_{\bar{S}} = -I_{\bar{S}} \omega_1 e_1 \wedge e_4 \quad (79)$$

Otóż okazuje się, że tego typu kanał przestrzenny charakteryzuje się ruchem obrotowym wokół osi  $e_4$  ale również wokół osi  $e_1$ . Przy czym obroty wokół osi  $e_1$  są w fizyce trójwymiarowej powiązane ze spinem.

Ponadto zauważmy, że istnieje dokładnie sześć liniowo niezależnych orientacji kanału przestrzennego i trzy orientacje, w których zachodzą obroty wokół osi  $e_4$ . Czyżby kwarki były kanałami przestrzennymi o takich właśnie orientacjach? Na to pytanie odpowiemy w kolejnych rozdziałach.