

5.3 TRANSFORMACJA LORENTZA

Rozdział należy do teorii pt. "Teoria Przestrzeni"
autorstwa

Dariusza Stanisława Sobolewskiego.

Http: www.htsengines.com

http: www.theoryofspace.info

E-mail: info@htsengines.com

© All rights reserved.

Transformacja Lorentza w czterowymiarowej czasoprzestrzeni pomiędzy układami $\bar{\Theta}$ i Θ , przy założeniu, że układ $\bar{\Theta}$ porusza się względem Θ z prędkością $\vec{v} = v\vec{e}_1$ jest następująca:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \gamma - \gamma\beta c^{-1}x_1 \\ \bar{x}_1 &= \gamma x_1 - \gamma\beta ct \\ \bar{x}_2 &= x_2 \\ \bar{x}_3 &= x_3 \end{aligned} \quad (1)$$

, gdzie $\beta = \frac{v}{c} < 1$ i $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$

Wzór na \bar{x}_1 prowadzi wprost do kontrakcji długości, która jest obecnie interpretowana dosłownie, przez co jej wartość poznawcza jest ograniczona. Aby wybrnąć z tej sytuacji wprowadzimy postulat, który jest uzasadniony strukturą przestrzeni:

Postulat zmiany orientacji przestrzeni lustrzanych:

Kontrakcja długości przy przekształceniu Lorentza wynika z różnego od zera kąta pomiędzy normalnymi do hiperpowierzchni brzegowych (przestrzeni lustrzanych) układów poruszających się względem siebie.

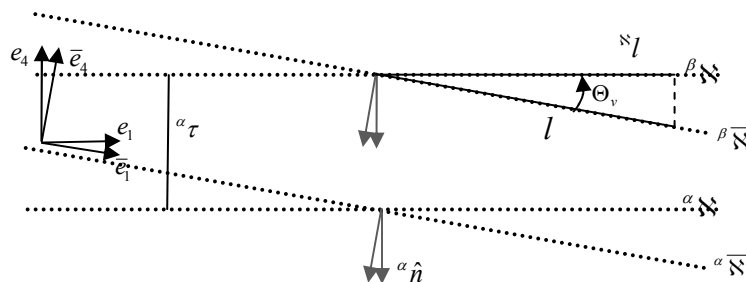


FIG. 1

Bezpośrednio z postulatu wynika, że długość pręta, zmierzonego w układzie względem którego pozostaje on w spoczynku, jest stała.

W związku z tym na rysunku oznaczono przez ${}^{\text{N}}l$ rzut pręta będącego w spoczynku w układzie $\overline{\Theta}$ na podprzestrzeń lustrzaną układu Θ . Oznacza to, że pomiar długości pręta znajdującego się w układzie $\overline{\Theta}$ sprowadza się do pomiaru jego rzutu na podprzestrzeń lustrzaną układu Θ .

Z rysunku otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \cos \Theta_v &= \frac{{}^{\text{N}}l}{l} = \gamma^{-1} \\ (1 - \beta^2) + \sin^2 \Theta_v &= 1 \\ \sin \Theta_v &= \beta \end{aligned} \quad (2)$$

Zatem korzystając z wzoru na dylatację czasu $\overline{\Delta t} = \gamma^{-1} \Delta t$ mamy:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{\text{N}}l}{l} &= \gamma^{-1} \\ \frac{\Delta t}{\overline{\Delta t}} &= \gamma \\ \frac{{}^{\text{N}}l}{l} * \frac{\Delta t}{\overline{\Delta t}} &= 1 = \frac{\overline{\Delta t}}{l} = \frac{c}{c} = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Reasumując, obserwator w układzie Θ analizując zjawisko polegające na rozprzestrzenianiu się promienia świetlnego w układzie $\overline{\Theta}$ wzdłuż pręta o długości l bierze pod uwagę¹ czas $\overline{\Delta t}$ oraz rzut pręta ${}^{\text{N}}l$ na przestrzenie lustrzane układu Θ lub długość pręta l i czas Δt w układzie $\overline{\Theta}$. Wielkości te uległy transformacji z uwagi na różny od zera kąt Θ_v pomiędzy normalnymi do hiperpowierzchni brzegowych układów poruszających się względem siebie.

Widać, zatem jasno i wyraźnie, że pomiar rzutu pręta na hiperpowierzchnie układu Θ , prowadzi do wprowadzenia błędnych pojęć kontrakcji długości oraz dylatacji czasu.

Należy wyraźnie podkreślić, że fizyczne układy współrzędnych są związane z obiektami fizycznymi, które określają w swoim otoczeniu hiperpowierzchnie brzegowe. Trzeba, zatem zwrócić szczególną uwagę na obszary określoności danego lokalnego układu współrzędnych związanego z danym obiektem fizycznym.

W związku z tym wprowadzimy definicję fizycznego układu współrzędnych:

Definicja fizycznego układu współrzędnych

¹ Skoro droga do przebycia przez światło jest „krótsza”, to musimy „wydłużyć” upływ czasu, aby zachować stałą prędkość światła.

Fizycznym układem współrzędnych związanym z danym obiektem fizycznym zajmującym obszar U nazywamy mapę (U, γ) określoną na U ².

W opisywanym przypadku układ $\overline{\Theta}$ był związany z prętem, w którym pręt pozostawał w spoczynku.

Z postulatu zmiany orientacji przestrzeni lustrzanych układu poruszającego się z prędkością \mathcal{V} względem innego układu wynika, że obiekty fizyczne związane z układami fizycznymi wpływają na geometrię przestrzeni. Obiekty, o których mowa zbudowane są z ogromnej liczby kanałów przestrzennych, które zmieniając swoją orientację doprowadzają do zmiany orientacji hiperpowierzchni brzegowych całego układu.

Aby ustalić orientację kanału przestrzennego poruszającego się względem układu Θ , przyjmujemy, że kanał przestrzenny łączący różne podprzestrzenie lustrzane będący w obszarze bez grawitacji³ jest w spoczynku, jeżeli jest ortogonalny do podprzestrzeni lustrzanych układu Θ .

Wyjaśnijmy, że układ Θ jest fizycznym układem współrzędnych, dlatego związane z nim kanały przestrzenne $\check{U}_{\Theta,i}$ określają hiperpowierzchnie brzegowe, które są do nich ortogonalne. Zatem w przypadku, gdy weźmiemy kanał przestrzenny \check{U}_1 równoległy do kanałów $\check{U}_{\Theta,i}$, to jest on również ortogonalny do hiperpowierzchni brzegowych wyznaczonych przez kanały $\check{U}_{\Theta,i}$.

Bezpośrednio z rysunku wynika, że kanały przestrzenne związane z układem $\overline{\Theta}$ tworzą zerowy kąt z normalnymi do hiperpowierzchni ${}^{\alpha}\overline{\mathcal{N}}$ i ${}^{\beta}\overline{\mathcal{N}}$. Natomiast względem hiperpowierzchni ${}^{\alpha}\mathcal{N}$ i ${}^{\beta}\mathcal{N}$ tworzą kąt Θ_v .

Inna sytuacja ma miejsce, jeżeli rozważamy ruch pojedynczego kanału przestrzennego w układzie Θ . Wówczas kanał przestrzenny zależnie od prędkości jest nachylony pod kątem Θ_v do normalnych hiperpowierzchni brzegowych, ale tym razem ich orientacja pozostaje niezmieniona. Kanał przestrzenny w takich warunkach będzie wykonywał złożony ruch (precesja i nutacja) utożsamiany w mechanice kwantowej z falami materii z uwagi na nieokreśloność jego położenia i pędu.

Dokładniej zajmiemy się tym tematem w innym rozdziale, jednak już teraz można zauważyć, dlaczego nie można dokładnie ustalić położenia cząsteczki elementarnej będącej w ruchu. Wystarczy w tym celu uzmysłowić sobie fakt, że położenie poruszającego się kanału

² Patrz „Oddziaływania grawitacyjne” oraz „Geometria oddziaływań grawitacyjnych”.

³ W kolejnych rozdziałach przekonamy się, że kanał przestrzenny będący w spoczynku względem obiektu astronomicznego, będącego źródłem pola grawitacyjnego, nie jest ortogonalny do hiperpowierzchni brzegowych.

przestrzennego określamy za pomocą trzech współrzędnych przestrzennych, a powinniśmy użyć znacznie większej ich ilości⁴.

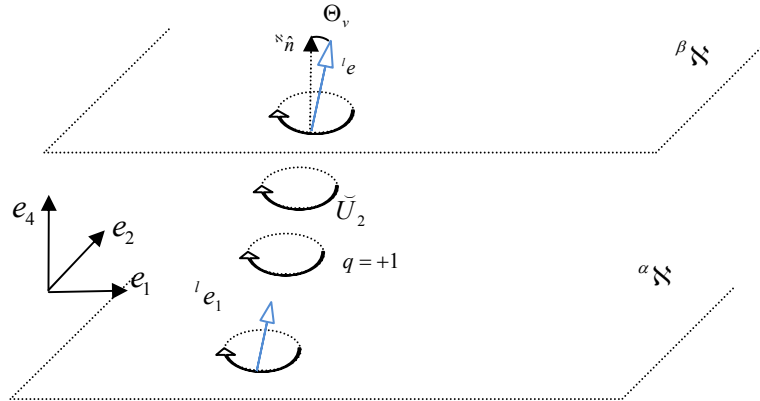


FIG. 2

Na rysunku przedstawiono kanał przestrzenny poruszający się z prędkością \vec{v} względem układu fizycznego Θ :

$$\vec{v} = (\vec{v} | e_1) e_1 \quad (4)$$

, dla którego kąt Θ_v jest zdefiniowany, jako kąt skierowany $\Theta_v = \angle({}^l e, e_4)$.

Transformacja D_t współrzędnych z układu $\bar{\Theta}$ do Θ to transformacja wynikająca z obrotu B_{Θ_v} układu $\bar{\Theta}$ w płaszczyźnie $L(e_1, e_4)$ dookoła płaszczyzny niezmienniczej $L(e_2, e_3)$ oraz translacji C_t w układzie Θ :

$$D_t = C_t B_{\Theta_v} \quad (5)$$

, gdzie

$$C_t \vec{x} = \vec{x} + \vec{v} t \quad (6)$$

, oraz

$$B_{\Theta_v} = \begin{bmatrix} \cos \Theta_v & 0 & 0 & \sin \Theta_v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta_v & 0 & 0 & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \quad (7)$$

, gdzie:

⁴ Zajmiemy się tym tematem w innym rozdziale jednak już teraz można powiedzieć, że do określenia tylko i wyłącznie położenia końców kanałów przestrzennych potrzebujemy sześciu współrzędnych przestrzennych.

$$\begin{aligned}\sin \Theta_v &= \beta \\ \cos \Theta_v &= \gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2}\end{aligned}\quad (8)$$

W postaci macierzowej transformacja układu współrzędnych ma postać:

$$D_t = C_t B_{\Theta_v} = \begin{bmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Theta_v & 0 & 0 & \sin \Theta_v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta_v & 0 & 0 & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix}\quad (9)$$

W ogólności rozważmy prędkość w dowolnym trójwymiarowym kierunku:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 = (\vec{v} | e_1) e_1 + (\vec{v} | e_2) e_2 + (\vec{v} | e_3) e_3 = \\ &= \|\vec{v}\| \cos \alpha_1 e_1 + \|\vec{v}\| \cos \alpha_2 e_2 + \|\vec{v}\| \cos \alpha_3 e_3 = \|\vec{v}\| \left(\frac{v_1}{\|\vec{v}\|} e_1 + \frac{v_2}{\|\vec{v}\|} e_2 + \frac{v_3}{\|\vec{v}\|} e_3 \right) = \\ &= \|\vec{v}\| \hat{v}\end{aligned}\quad (10)$$

i obróćmy czterowymiarowy układ współrzędnych w płaszczyźnie $L(\hat{v}, e_4)$ o kąt Θ_v .

Aby tego dokonać⁵ sprowadzimy obrót w płaszczyźnie $L(\vec{v}, e_4)$ do obrotu w płaszczyźnie $L(e_1, e_4)$ stosując kolejno dwa obroty $B_\beta B_\alpha$:

$$B_{\vec{v}} = B_\alpha^{-1} B_\beta^{-1} B_{\Theta_v} B_\beta B_\alpha\quad (11)$$

Transformacja układu współrzędnych będzie miała postać:

$$D_t = C_t B_{\vec{v}} = C_t B_\alpha^{-1} B_\beta^{-1} B_{\Theta_v} B_\beta B_\alpha\quad (12)$$

Obrót B_α jest obrotem układu współrzędnych wokół hiperpowierzchni

niezmienniczej $L(e_1, e_4)$ o kąt $\sin \alpha = \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}$:

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (13)$$

⁵ Można też zastosować algebrę kwaternionów.

, a następnie obrót B_β wokół hiperpowierzchni niezmienniczej $L(e_2, e_4)$

$$\text{okąt } \sin \beta = \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} :$$

$$B_\beta = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} & 0 & \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 & \frac{v_1}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Ostatecznie mamy:

$$B_v = B_\alpha^{-1} B_\beta^{-1} B_{\Theta_v} B_\beta B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{-v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} & 0 & -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 & \frac{v_1}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \Theta_v & 0 & 0 & \sin \Theta_v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta_v & 0 & 0 & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} & 0 & \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 & \frac{v_1}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, gdzie:

$$B_\beta B_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} & 0 & \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 & \frac{v_1}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} & -\frac{v_2}{\|v\|} & \frac{v_3}{\|v\|} & 0 \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & -\frac{v_1}{\|v\|} \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_1}{\|v\|} \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B_{\theta}, B_{\beta} B_z = \begin{bmatrix} \cos \Theta_v & 0 & 0 & \sin \Theta_v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta_v & 0 & 0 & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} & -\frac{v_2}{\|v\|} & \frac{v_3}{\|v\|} & 0 \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & -\frac{v_1}{\|v\|} \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_1}{\|v\|} \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} \cos \Theta_v & -\frac{v_2}{\|v\|} \cos \Theta_v & \frac{v_3}{\|v\|} \cos \Theta_v & \sin \Theta_v \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & -\frac{v_1}{\|v\|} \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_1}{\|v\|} \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ -\frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$B_{\beta}^{-1} B_{\alpha} B_{\beta} B_z = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} & 0 & -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 & \frac{v_1}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} \cos \Theta_v & -\frac{v_2}{\|v\|} \cos \Theta_v & \frac{v_3}{\|v\|} \cos \Theta_v & \sin \Theta_v \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & -\frac{v_1}{\|v\|} \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_1}{\|v\|} \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ -\frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_2^2 + v_3^2}{\|v\|^2} & -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2} & \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - \frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} & \frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ v_1 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - v_1 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} & -v_2 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & v_3 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ v_1 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -v_2 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & v_3 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix}$$

$$B_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & -\frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ v_1 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -v_2 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & v_3 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_2^2}{v_2^2 + v_3^2} + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2 v_2^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} & \frac{v_2 v_3}{v_2^2 + v_3^2} + \frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - \frac{v_1^2 v_2 v_3}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} & -\frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ \frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_2 v_3}{v_2^2 + v_3^2} + \frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - \frac{v_1^2 v_2 v_3}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} & \frac{v_3^2}{v_2^2 + v_3^2} + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2 v_3^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} & \frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ \frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix}$$

We wzorze (19) zastosowano następujące uproszczenia:

$$\begin{aligned}
& \frac{v_2 v_3}{v_2^2 + v_3^2} - \frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - \frac{v_1^2 v_2 v_3}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} = \frac{v_2 v_3}{v_2^2 + v_3^2} \left(1 - \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \right) - \frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} \cos \Theta_v = \\
& = \frac{v_2 v_3}{v_2^2 + v_3^2} \left(\frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} - \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \right) - \frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} \cos \Theta_v = \frac{v_2 v_3}{v_2^2 + v_3^2} \left(\frac{v_2^2 + v_3^2}{\|v\|^2} \right) - \frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} \cos \Theta_v = \quad (20) \\
& = \frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} - \frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} \cos \Theta_v = \frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} (1 - \cos \Theta_v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{v_3^2}{v_2^2 + v_3^2} + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2 v_2^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} = \frac{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) v_3^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2 v_2^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} = \\
& = \frac{v_1^2 v_3^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2 v_2^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} = \frac{v_1^2 (v_2^2 + v_3^2)}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v = \quad (21) \\
& = \frac{v_1^2}{\|v\|^2} + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v = 1 - \frac{v_2^2}{\|v\|^2} + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v = 1 + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{v_2^2}{v_2^2 + v_3^2} + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2 v_3^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} = \frac{\|v\|^2 v_2^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2 v_3^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} = \\
& = \frac{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) v_2^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2 v_3^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} = \frac{v_1^2 v_2^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2 v_3^2}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} = \\
& = \frac{v_1^2 (v_2^2 + v_3^2)}{\|v\|^2 (v_2^2 + v_3^2)} + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v = \frac{v_1^2}{\|v\|^2} + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v = 1 - \frac{v_3^2}{\|v\|^2} + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v = \\
& = 1 + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) \quad (22)
\end{aligned}$$

Przekształcenie $B_{\hat{v}}$ przybiera ostateczną postać:

$$B_{\hat{v}} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_3^2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \quad (23)$$

Wyznacznik macierzy $B_{\hat{v}}$ jest równy jedności, ponieważ:

$$|B_{\hat{v}}| = |B_{\alpha}^{-1} B_{\beta}^{-1} B_{\Theta_v} B_{\beta} B_{\alpha}| = |B_{\alpha}^{-1}| |B_{\beta}^{-1}| |B_{\Theta_v}| |B_{\beta}| |B_{\alpha}| = |B_{\alpha}|^{-1} |B_{\beta}|^{-1} |B_{\Theta_v}| |B_{\beta}| |B_{\alpha}| = |B_{\Theta_v}| = 1 \quad (24)$$

Przekształcenie odwrotne $B_{\hat{v}}^{-1}$ jest równé⁶:

⁶ Macierz $B_{\hat{v}}$ nie jest ortogonalna stąd konieczność powtórzenia obliczeń.

$$B_v^{-1} = (B_\alpha^{-1} B_\beta^{-1} B_{\Theta_v} B_\beta B_\alpha)^{-1} = B_\alpha^{-1} B_\beta^{-1} B_{\Theta_v}^{-1} B_\beta B_\alpha = B_\alpha^T B_\beta^T B_{\Theta_v}^T B_\beta B_\alpha$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{-v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} & 0 & -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 & \frac{v_1}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \Theta_v & 0 & 0 & -\sin \Theta_v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta_v & 0 & 0 & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} & 0 & \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 \\ \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 & \frac{v_1}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mamy kolejno:

$$B_{\Theta_v}^T B_\beta B_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \Theta_v & 0 & 0 & -\sin \Theta_v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta_v & 0 & 0 & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} & -\frac{v_2}{\|v\|} & \frac{v_3}{\|v\|} & 0 \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & -\frac{v_1}{\|v\|} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} \cos \Theta_v & -\frac{v_2}{\|v\|} \cos \Theta_v & \frac{v_3}{\|v\|} \cos \Theta_v & -\sin \Theta_v \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & -\frac{v_1}{\|v\|} \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_1}{\|v\|} \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ \frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$B_\beta^T B_{\Theta_v}^T B_\beta B_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} & 0 & -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & 0 \\ \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 & \frac{v_1}{\|v\|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} \cos \Theta_v & \frac{v_2}{\|v\|} \cos \Theta_v & \frac{v_3}{\|v\|} \cos \Theta_v & -\sin \Theta_v \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} & -\frac{v_1}{\|v\|} \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_1}{\|v\|} \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ \frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_2^2 + v_3^2}{\|v\|^2} & -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2} & \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - \frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} & -\frac{v_1}{\|v\|^2} \sin \Theta_v \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ v_2 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - v_1 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} & -v_2 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & v_2 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \sin \Theta_v \\ \frac{v_1}{\|v\|^2} \sin \Theta_v & -\frac{v_2}{\|v\|^2} \sin \Theta_v & \frac{v_3}{\|v\|^2} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1}{\|v\|^2} \sin \Theta_v \\ 0 & \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ v_2 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} (\cos \Theta_v - 1) - v_1 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} & -v_2 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & v_2 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} \frac{v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \sin \Theta_v \\ \frac{v_1}{\|v\|^2} \sin \Theta_v & -\frac{v_2}{\|v\|^2} \sin \Theta_v & \frac{v_3}{\|v\|^2} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix}$$

$$B_v^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_1}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{-v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_1}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ 0 & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & 0 \\ v_1 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -v_1 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v - \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & v_1 \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|^2} \cos \Theta_v + \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} & -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ \frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \quad (28)$$

Ostatecznie:

$$B_v^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_2^2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_3^2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ \frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \quad (29)$$

Transformacja D_t współrzędnych z układu $\bar{\Theta}$ do Θ będzie miała postać:

$$D_t = C_t B_v \quad (30)$$

, która po uwzględnieniu wzoru (23) daje:

$$D_t \bar{x} = C_t B_v \bar{x} = \begin{bmatrix} v_1 t \\ v_2 t \\ v_3 t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_2^2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_3^2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Transformacja odwrotna D_t^{-1} :

$$D_t^{-1} = B_v^{-1} C_t^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_2^2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ \frac{v_1 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_3^2}{\|v\|^2}(\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v \\ \frac{v_1}{\|v\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_2}{\|v\|} \sin \Theta_v & \frac{v_3}{\|v\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\bar{v} | e_1) \\ -(\bar{v} | e_2) \\ -(\bar{v} | e_3) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Jak wynika z powyższych wzorów transformacja współrzędnych w teorii TP nie zmienia odległości pomiędzy dwoma dowolnymi punktami. Również interwały czasowe przy przejściu z jednego układu do drugiego są niezmiennicze, dlatego transformację współrzędnych przestrzennych można w prosty sposób rozszerzyć o transformację czasu:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{v} | e_1) \mathcal{L} \\ (\vec{v} | e_2) \mathcal{L} \\ (\vec{v} | e_3) \mathcal{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1 v_2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1}{\|\mathcal{V}\|} \sin \Theta_v & 0 \\ -\frac{v_1 v_2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_2^2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2}{\|\mathcal{V}\|} \sin \Theta_v & 0 \\ \frac{v_1 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_3^2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_3}{\|\mathcal{V}\|} \sin \Theta_v & 0 \\ -\frac{v_1}{\|\mathcal{V}\|} \sin \Theta_v & \frac{v_2}{\|\mathcal{V}\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_3}{\|\mathcal{V}\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{t} \end{bmatrix} \quad (33)$$

, a transformacja odwrotna:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1^2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1 v_2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_1 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_1}{\|\mathcal{V}\|} \sin \Theta_v & 0 \\ -\frac{v_1 v_2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_2^2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & \frac{v_2}{\|\mathcal{V}\|} \sin \Theta_v & 0 \\ \frac{v_1 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_2 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & 1 + \frac{v_3^2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\cos \Theta_v - 1) & -\frac{v_3}{\|\mathcal{V}\|} \sin \Theta_v & 0 \\ \frac{v_1}{\|\mathcal{V}\|} \sin \Theta_v & -\frac{v_2}{\|\mathcal{V}\|} \sin \Theta_v & \frac{v_3}{\|\mathcal{V}\|} \sin \Theta_v & \cos \Theta_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\vec{v} | e_1) \mathcal{L} \\ (\vec{v} | e_2) \mathcal{L} \\ (\vec{v} | e_3) \mathcal{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Wykorzystując wzory (8), w których należy przyjąć $\mathcal{V} = \|\mathcal{V}\|$ i podstawiając je do (33) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1 t + \left(1 + \frac{v_1^2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \right) \bar{x}_1 - \frac{v_1 v_2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \bar{x}_2 + \frac{v_1 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \bar{x}_3 + \frac{v_1}{c} \bar{x}_4 \\ x_2 &= v_2 t - \frac{v_1 v_2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \bar{x}_1 + \left(1 + \frac{v_2^2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \right) \bar{x}_2 - \frac{v_2 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \bar{x}_3 - \frac{v_2}{c} \bar{x}_4 \\ x_3 &= v_3 t + \frac{v_1 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \bar{x}_1 - \frac{v_2 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \bar{x}_2 + \left(1 + \frac{v_3^2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \right) \bar{x}_3 + \frac{v_3}{c} \bar{x}_4 \\ x_4 &= -\frac{v_1}{c} \bar{x}_1 + \frac{v_2}{c} \bar{x}_2 - \frac{v_3}{c} \bar{x}_3 + \gamma^{-1} \bar{x}_4 \\ t &= \bar{t} \end{aligned} \quad (35)$$

Transformacja odwrotna ma postać:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \left(1 + \frac{v_1^2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \right) (x_1 - v_1 t) - \frac{v_1 v_2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) (x_2 - v_2 t) + \frac{v_1 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) (x_3 - v_3 t) - \frac{v_1}{c} x_4 \\ \bar{x}_2 &= -\frac{v_1 v_2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) (x_1 - v_1 t) + \left(1 + \frac{v_2^2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \right) (x_2 - v_2 t) - \frac{v_2 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) (x_3 - v_3 t) + \frac{v_2}{c} x_4 \\ \bar{x}_3 &= v_3 t + \frac{v_1 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) (x_1 - v_1 t) - \frac{v_2 v_3}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) (x_2 - v_2 t) + \left(1 + \frac{v_3^2}{\|\mathcal{V}\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \right) (x_3 - v_3 t) - \frac{v_3}{c} x_4 \\ \bar{x}_4 &= \frac{v_1}{c} (x_1 - v_1 t) - \frac{v_2}{c} (x_2 - v_2 t) + \frac{v_3}{c} (x_3 - v_3 t) + \gamma^{-1} x_4 \\ \bar{t} &= t \end{aligned} \quad (36)$$

Zapiszmy jeszcze przypadki szczególne transformacji dla prędkości leżących na płaszczyźnie $L(e_1, e_2)$. Transformacje dla tego typu przypadku można wyznaczyć podstawiając:

$$v_3 = 0 \quad (37)$$

, do wzorów (35) i (36).

$$\begin{aligned}
x_1 &= v_1 t + \left(1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \right) \bar{x}_1 - \frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \bar{x}_2 + \frac{v_1}{c} \bar{x}_4 \\
x_2 &= v_2 t - \frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \bar{x}_1 + \left(1 + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \right) \bar{x}_2 - \frac{v_2}{c} \bar{x}_4 \\
x_3 &= \bar{x}_3 \\
x_4 &= -\frac{v_1}{c} \bar{x}_1 + \frac{v_2}{c} \bar{x}_2 + \gamma^{-1} \bar{x}_4 \\
t &= \bar{t}
\end{aligned} \tag{38}$$

, oraz:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= \left(1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \right) (x_1 - v_1 t) - \frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\gamma^{-1} - 1) (x_2 - v_2 t) - \frac{v_1}{c} x_4 \\
\bar{x}_2 &= -\frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} (\gamma^{-1} - 1) (x_1 - v_1 t) + \left(1 + \frac{v_2^2}{\|v\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \right) (x_2 - v_2 t) + \frac{v_2}{c} x_4 \\
\bar{x}_3 &= x_3 \\
\bar{x}_4 &= \frac{v_1}{c} (x_1 - v_1 t) - \frac{v_2}{c} (x_2 - v_2 t) + \gamma^{-1} x_4 \\
\bar{t} &= t
\end{aligned} \tag{39}$$

W szczególnym przypadku dla:

$$\begin{aligned}
v_2 &= 0 \\
v_3 &= 0
\end{aligned} \tag{40}$$

mamy:

$$\begin{aligned}
x_1 &= v_1 t + \left(1 + \frac{v_1^2}{\|v\|^2} (\gamma^{-1} - 1) \right) \bar{x}_1 + \frac{v_1}{c} \bar{x}_4 = v_1 t + \gamma^{-1} \bar{x}_1 + \frac{v_1}{c} \bar{x}_4 \\
x_2 &= \bar{x}_2 \\
x_3 &= \bar{x}_3 \\
x_4 &= -\frac{v_1}{c} \bar{x}_1 + \gamma^{-1} \bar{x}_4 \\
t &= \bar{t}
\end{aligned} \tag{41}$$

, oraz:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta_v & 0 & 0 & -\sin \Theta_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \Theta_v & 0 & 0 & \cos \Theta_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\bar{v} | e_1) \bar{t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Reasumując, należy stwierdzić, że tradycyjne wzory transformacyjne z układu $\bar{\Theta}$ do Θ wynikają z błędnego założenia dotyczącego struktury przestrzeni, co prowadzi do utożsamiania obiektów z układu $\bar{\Theta}$ z ich rzutami na hiperpowierzchnię brzegową układu Θ .

Zestawienie rzutów wielkości fizycznych układu $\bar{\Theta}$ na hiperpowierzchnię brzegową układu Θ w postaci tabelarycznej:

Chapter belongs to the "Theory of Space" written by Dariusz Stanisław Sobolewski.

Http: www.htsengines.com

E-mail: info@htsengines.com

© All rights reserved.

Wielkość fizyczna	Transformacja	Rzut
l	$l\gamma^{-1}$	$l \cos\Theta_v$
Δt	$\Delta t\gamma^{-1}$	$\Delta t \cos\Theta_v$