4. RÓWNANIA EULERA W PRZESTRZENI CZTEROWYMIAROWEJ

Rozdział należy do teorii pt. "Teoria Przestrzeni"
autorstwa
Dariusza Stanisława Sobolewskiego.
Http: www.htsengines.com
http: www.theoryofspace.info
E-mail: info@htsengines.com

4.1 RÓWNANIA EULERA W PRZESTRZENI CZTEROWYMIAROWEJ

W niniejszym rozdziale powtórzymy znane obliczenia wykonane jeszcze przez Poissona transformacji prędkości punktów przestrzeni z układu Θ do Θ' mając na uwadze przestrzeń czterowymiarową.

Jednakże prezentowane obliczenia różnią się znacząco od obecnie istniejących z uwagi na to, że w sposób ścisły wprowadzają formy różniczkowe, określone na rozmaitości różniczkowej, związane z obrotami dowolnej grupy SO(n) uwypuklając przy tym ich hiperpowierzchnie niezmiennicze.

Rozważmy podzbiór U rozmaitości różniczkowej przestrzeni fizycznej M^{Re} zanurzonej w czterowymiarowej przestrzeni Euklidesa E^4. Przy czym, w dalszej części rozdziału założymy, że mapą podzbioru U jest odwzorowanie identycznościowe z podzbioru przestrzeni $U \subset E^4$ na U.

W układzie Θ mamy wyróżniony punkt P_0 i bazę ortonormalną $\{e_i : i = 1,2,3,4\}$ a w układzie Θ' punkt P'_0 i bazę ortonormalną $\{e'_i : i = 1,2,3,4\}$. Na rysunku poniżej przedstawiono oba układy współrzędnych oraz promienie wodzące punktu materialnego P. Wersory orientacji przestrzeni lustrzanej α i β oznaczono przez ${}^{\alpha}\hat{n}$ i ${}^{\beta}\hat{n}$.

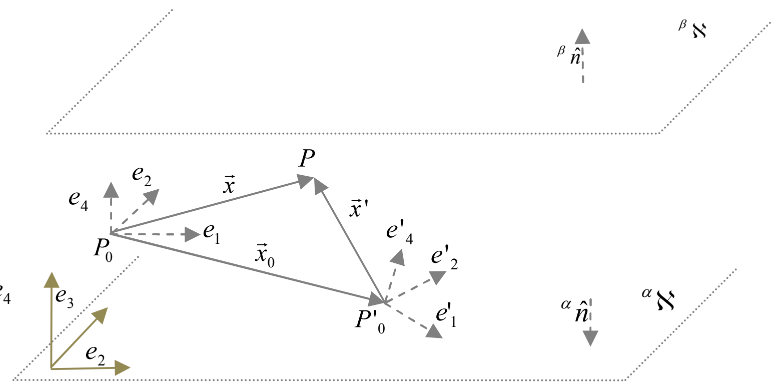

FIG. 1

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{x}_0 + \vec{x}'\right) = v_0 + \frac{d}{dt'}\left(\sum_{i=1}^{4} x'_i e'_i\right)\frac{dt'}{dt} = v_0 + \sum_{i=1}^{4}\frac{dx'_i}{dt'}e'_i + \sum_{i=1}^{4} x'_i \frac{de'_i}{dt'} \qquad \textbf{(1)}$$

Rozkładając wielkość $\dfrac{de'_i}{dt'}$ w bazie $\{e'_i : i = 1,2,3,4\}$ mamy:

$$\frac{de'_i}{dt'} = \sum_{j=1}^{4} A^i_j e'_j = *^T\left(A^i_1 e'_2 \wedge e'_3 \wedge e'_4 + A^i_2 e'_4 \wedge e'_3 \wedge e'_1 + A^i_3 e'_4 \wedge e'_1 \wedge e'_2 + A^i_4 e'_2 \wedge e'_1 \wedge e'_3\right) \qquad \textbf{(2)}$$

, gdzie A_k^i :

$$A_k^i = \left(e'_k \,|\, \frac{de'_i}{dt'} \right) \tag{3}$$

, oraz $*^T$ izomorfizm pomiędzy n wymiarową przestrzenią wektorową E^n a przestrzenią $\binom{n}{n-1}$ wymiarową $\wedge^{n-1} E^n$ iloczynów zewnętrznych $n-1$ wektorów.

W ogólnym przypadku izomorfizm $*^T$ pomiędzy przestrzenią liniową k iloczynów zewnętrznych $\wedge^k E^n$ a przestrzenią liniową $n-k$ iloczynów zewnętrznych $\wedge^{n-k} E^n$

$$*^T \left(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \right) = \varepsilon_{i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_{n-k}, i_1, i_2, \ldots, i_k} e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-k}} \tag{4}$$

W szczególności dla przestrzeni czterowymiarowej mamy:

$$\begin{aligned} *^T \left(e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \right) &= e_1 \\ *^T \left(e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 \right) &= e_2 \\ *^T \left(e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 \right) &= e_3 \\ *^T \left(e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 \right) &= e_4 \end{aligned} \tag{5}$$

Zatem, przyjmując oznaczenia:

$$\begin{aligned} e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 &= \overset{3}{e}_1 \\ e_4 \wedge e_3 \wedge e_1 &= \overset{3}{e}_2 \\ e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 &= \overset{3}{e}_3 \\ e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 &= \overset{3}{e}_4 \end{aligned} \tag{6}$$

, mamy:

$$*^T : \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{n-1}{e}_i \to \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \tag{7}$$

, gdzie $n = 4$, $\vec{x} \in E^n$, $\overset{n-1}{e}_i = \underbrace{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ldots \wedge e_{i_{n-1}}}_{n-1}$

, lub ogólniej

$$*^T \overset{n-1}{\xi} = \sum_{i=1}^{n} x_i *^T \overset{n-1}{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \tag{8}$$

Wyjaśnijmy, że operator $*^T$ nie jest operatorem Hodgea, ponieważ różni się od niego nieznacznie definicją. Definicja operatora Hodgea:

$$*\left(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \right) = \varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_{n-k}} e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-k}} \tag{9}$$

Zatem operatory te różnią się znakiem:

$$*\left(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}\right) = (-1)^{k(n-k)} *^T \left(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}\right) \tag{10}$$

Operator $*^T$ nazwiemy operatorem transponowanym gwiazdki Hodgea. Operator $*^T$ ma następujące właściwości:

$$*^T *^T\left(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}\right) = *^T \varepsilon_{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_{n-k},i_1,i_2,\ldots,i_k} e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-k}} = \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_k,i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_{n-k}} \varepsilon_{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_{n-k},i_1,i_2,\ldots,i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$$
$$*^T *^T = (-1)^{k(n-k)} Id$$

$$\left(*^T\right)^{-1}\left(e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-k}}\right) = \varepsilon_{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_{n-k},i_1,i_2,\ldots,i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = *(e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-k}}) =$$
$$= (-1)^{k(n-k)} \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_k,i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_{n-k}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$$
$$\left(*^T\right)^{-1} = *$$

$$*^T *\left(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}\right) = *^T \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_k,i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_{n-k}} e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-k}} = \varepsilon^2{}_{i_1,i_2,\ldots,i_k,i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_{n-k}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$$
$$*^T * = * *^T = Id \tag{11}$$

$$\left(*^T\right)^{-1} *\left(e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-k}}\right) = \left(*^T\right)^{-1} \varepsilon_{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_{n-k},i_1,i_2,\ldots,i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = \varepsilon_{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_{n-k},i_1,i_2,\ldots,i_k} \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_k,i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_{n-k}} e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-k}} =$$
$$= (-1)^{k(n-k)} e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-k}}$$
$$\left(*^T\right)^{-1} * = (-1)^{k(n-k)} Id$$

$$\left(*^T\right)^{-1} *^{-1}\left(e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-k}}\right) = \left(*^T\right)^{-1} \varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_k,i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_{n-k}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = \varepsilon^2{}_{i_1,i_2,\ldots,i_k,i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_{n-k}} e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-k}}$$
$$\left(*^T\right)^{-1} *^{-1} = *^{-1}\left(*^T\right)^{-1} = Id$$

Korzystając z ortonormalności wersorów $\{e'_i : i = 1,2,3,4\}$ mamy:

$$\left(e'_i \mid e'_j\right) = \delta_{ij} \tag{12}$$

, zatem różniczkując względem czasu w układzie Θ otrzymujemy:

$$\left(\frac{de'_i}{dt'} \mid e'_j\right) + \left(e'_i \mid \frac{de'_j}{dt'}\right) = 0 \tag{13}$$

, z której wynika, że $\frac{de'_i}{dt'}$ jest ortogonalny do e'_i.

Zatem:

$$\begin{aligned}
&*\frac{de'_1}{dt'} = A'^1_1 e'_2 \wedge e'_3 \wedge e'_4 + A'^1_2 e'_4 \wedge e'_3 \wedge e'_1 + A'^1_3 e'_4 \wedge e'_1 \wedge e'_2 + A'^1_4 e'_2 \wedge e'_1 \wedge e'_3 = \\
&= \left(e'_1 \mid \frac{de'_1}{dt'}\right) e'_2 \wedge e'_3 \wedge e'_4 + \left(e'_2 \mid \frac{de'_1}{dt'}\right) e'_4 \wedge e'_3 \wedge e'_1 + \left(e'_3 \mid \frac{de'_1}{dt'}\right) e'_4 \wedge e'_1 \wedge e'_2 + \left(e'_4 \mid \frac{de'_1}{dt'}\right) e'_2 \wedge e'_1 \wedge e'_3 = \\
&= \left(e'_2 \mid \frac{de'_1}{dt'}\right) e'_4 \wedge e'_3 \wedge e'_1 - \left(e'_1 \mid \frac{de'_3}{dt'}\right) e'_4 \wedge e'_1 \wedge e'_2 + \left(e'_4 \mid \frac{de'_1}{dt'}\right) e'_2 \wedge e'_1 \wedge e'_3 = \\
&= \left(e'_2 \mid \frac{de'_1}{dt'}\right) e'_4 \wedge e'_3 \wedge e'_1 + \left(e'_1 \mid \frac{de'_3}{dt'}\right) e'_4 \wedge e'_2 \wedge e'_1 + \left(e'_4 \mid \frac{de'_1}{dt'}\right) e'_3 \wedge e'_2 \wedge e'_1 = \\
&\left(\left(e'_2 \mid \frac{de'_3}{dt'}\right) e'_1 \wedge e'_4 + \left(e'_3 \mid \frac{de'_4}{dt'}\right) e'_1 \wedge e'_2 + \left(e'_4 \mid \frac{de'_2}{dt'}\right) e'_1 \wedge e'_3 + \left(e'_2 \mid \frac{de'_1}{dt'}\right) e'_4 \wedge e'_3 + \left(e'_1 \mid \frac{de'_3}{dt'}\right) e'_4 \wedge e'_2 + \left(e'_4 \mid \frac{de'_1}{dt'}\right) e'_3 \wedge e'_2\right) \wedge e'_1
\end{aligned} \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
&*\frac{de'_2}{dt'}=A_1^2 e'_2\wedge e'_3\wedge e'_4+A_2^2 e'_4\wedge e'_3\wedge e'_1+A_3^2 e'_4\wedge e'_1\wedge e'_2+A_4^2 e'_2\wedge e'_1\wedge e'_3=\\
&=\left(e'_1|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_2\wedge e'_3\wedge e'_4+\left(e'_2|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_4\wedge e'_3\wedge e'_1+\left(e'_3|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_4\wedge e'_1\wedge e'_2+\left(e'_4|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_2\wedge e'_1\wedge\\
&=\left(e'_1|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_2\wedge e'_3\wedge e'_4-\left(e'_2|\frac{de'_3}{dt'}\right)e'_4\wedge e'_1\wedge e'_2+\left(e'_4|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_2\wedge e'_1\wedge e'_3=\\
&=\left(e'_1|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_3\wedge e'_4\wedge e'_2+\left(e'_2|\frac{de'_3}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_4\wedge e'_2+\left(e'_4|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_3\wedge e'_2=\\
&\Bigg(\left(e'_1|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_3\wedge e'_4+\left(e'_2|\frac{de'_3}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_4+\left(e'_4|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_3\Bigg)\wedge e'_2
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&*\frac{de'_3}{dt'}=A_1^3 e'_2\wedge e'_3\wedge e'_4+A_2^3 e'_4\wedge e'_3\wedge e'_1+A_3^3 e'_4\wedge e'_1\wedge e'_2+A_4^3 e'_2\wedge e'_1\wedge e'_3=\\
&=\left(e'_1|\frac{de'_3}{dt'}\right)e'_2\wedge e'_3\wedge e'_4+\left(e'_2|\frac{de'_3}{dt'}\right)e'_4\wedge e'_3\wedge e'_1+\left(e'_3|\frac{de'_3}{dt'}\right)e'_4\wedge e'_1\wedge e'_2+\left(e'_4|\frac{de'_3}{dt'}\right)e'_2\wedge\\
&=\left(e'_1|\frac{de'_3}{dt'}\right)e'_4\wedge e'_2\wedge e'_3+\left(e'_2|\frac{de'_3}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_4\wedge e'_3+\left(e'_3|\frac{de'_4}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_2\wedge e'_3=\\
&\Bigg(\left(e'_1|\frac{de'_3}{dt'}\right)e'_4\wedge e'_2+\left(e'_2|\frac{de'_3}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_4+\left(e'_3|\frac{de'_4}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_2\Bigg)\wedge e'_3
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
&*\frac{de'_4}{dt'}=A_1^4 e'_2\wedge e'_3\wedge e'_4+A_2^4 e'_4\wedge e'_3\wedge e'_1+A_3^4 e'_4\wedge e'_1\wedge e'_2+A_4^4 e'_2\wedge e'_1\wedge e'_3=\\
&=\left(e'_1|\frac{de'_4}{dt'}\right)e'_2\wedge e'_3\wedge e'_4+\left(e'_2|\frac{de'_4}{dt'}\right)e'_4\wedge e'_3\wedge e'_1+\left(e'_3|\frac{de'_4}{dt'}\right)e'_4\wedge e'_1\wedge e'_2+\left(e'_4|\frac{de'_4}{dt'}\right)e'_2\wedge\\
&=\left(e'_4|\frac{de'_1}{dt'}\right)e'_3\wedge e'_2\wedge e'_4+\left(e'_4|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_3\wedge e'_4+\left(e'_3|\frac{de'_4}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_2\wedge e'_4=\\
&=\Bigg(\left(e'_4|\frac{de'_1}{dt'}\right)e'_3\wedge e'_2+\left(e'_4|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_3+\left(e'_3|\frac{de'_4}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_2\Bigg)\wedge e'_4
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Powtarzający się dwuwektor nazwiemy prędkością kątową $\overset{2}{\omega}$, który zdefiniujemy następująco:

$$
\begin{aligned}
\overset{2}{\omega}:=&\left(e'_2|\frac{de'_3}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_4+\left(e'_3|\frac{de'_4}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_2+\left(e'_4|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_1\wedge e'_3+\\
&+\left(e'_1|\frac{de'_2}{dt'}\right)e'_3\wedge e'_4+\left(e'_3|\frac{de'_1}{dt'}\right)e'_2\wedge e'_4+\left(e'_1|\frac{de'_4}{dt'}\right)e'_2\wedge e'_3
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Nie przypadkowo oznaczyliśmy prędkość kątową $\overset{2}{\omega}$ jako formę różniczkową drugiego stopnia, określoną na wiązce stycznej TM^{Re} rozmaitości M^{Re} przestrzeni fizycznej czterowymiarowej ponieważ, w myśl definicji forma różniczkowa w punkcie q rozmaitości M^{Re} jest k –formą zewnętrzną określoną na przestrzeni stycznej TM_q^{Re}.[1]

[1] Zobacz uzupełnienia. Wyjaśniamy, że przejście od wektorów do form liniowych jest możliwe dzięki izomorfizmowi określonemu przez iloczyn skalarny. Z kolei iloczyn skalarny może być zdefiniowany za pomocą metryki Riemanna na rozmaitości Reimanna.

Zatem równanie na prędkością kątową $\overset{2}{\omega}$ możemy zapisać w uogólniony sposób, jako formę różniczkową drugiego stopnia określoną na rozmaitości TM^4 w postaci:

$$
\begin{aligned}
&\overset{2}{\omega}(q) := \omega_{1,4}(q)dq_1 \wedge dq_4 + \omega_{1,2}(q)dq_1 \wedge dq_2 + \omega_{1,3}(q)dq_1 \wedge dq_3 + \\
&+ \omega_{3,4}(q)dq_3 \wedge dq_4 + \omega_{2,4}(q)dq_2 \wedge dq_4 + \omega_{2,3}(q)dq_2 \wedge dq_3 \\
&\omega_{1,4}(q) = \left(e'_2(q) \,|\, \frac{de'_3}{dt'}(q) \right) \overset{def}{=} \omega_1(q) \\
&\omega_{1,2}(q) = \left(e'_3(q) \,|\, \frac{de'_4}{dt'}(q) \right) \overset{def}{=} \omega_4(q) \\
&\omega_{1,3}(q) = \left(e'_4(q) \,|\, \frac{de'_2}{dt'}(q) \right) \overset{def}{=} \omega_5(q) \\
&\omega_{3,4}(q) = \left(e'_1(q) \,|\, \frac{de'_2}{dt'}(q) \right) \overset{def}{=} \omega_3(q) \\
&\omega_{2,4}(q) = \left(e'_3(q) \,|\, \frac{de'_1}{dt'}(q) \right) \overset{def}{=} \omega_2(q) \\
&\omega_{2,3}(q) = \left(e'_1(q) \,|\, \frac{de'_4}{dt'}(q) \right) \overset{def}{=} \omega_6(q)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

, gdzie $q \in M^4$

Oznacza to, że będziemy korzystali z formy zewnętrznej i różniczkowej prędkości kątowej, co nie powinno prowadzić do nieporozumień. Przy czym forma zewnętrzna równania jest określona na przestrzeni liniowej $\binom{n}{n-2}$ wymiarowej $\wedge^{n-2} E^n$ form zewnętrznych rzędu n-2 określonych na przestrzeni E^n.

Reasumując w przestrzeni fizycznej będącej n wymiarową rozmaitością różniczkową $n > 3$ prędkość kątowa jest formą różniczkową rzędu n-2 określoną na tej rozmaitości.

Ostatecznie podstawiając do wzoru (1) otrzymujemy:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{x}'}{dt} + *^T \overset{2}{\omega} \wedge \vec{x}' \tag{20}$$

, oraz:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + *^T \overset{2}{\omega} \wedge \vec{x}' \tag{21}$$

W układzie współrzędnych Θ' będziemy zawsze analizowali tylko takie elementy[2], dla których prędkość $\vec{v}'$ jest równa zeru:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + *^T \overset{2}{\omega} \wedge \vec{x}' \tag{22}$$

Ogólniej w przestrzeni n wymiarowej mamy:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + *^T \overset{n-2}{\omega} \wedge \vec{x}' \tag{23}$$

[2] Tymi elementami są małe obszary przestrzeni.

, ale $\vec{v}_0$ można zapisać jako:

$$\vec{v}_0 = *^T * \vec{v}_0 \tag{24}$$

Zatem podstawiając (24) do wzoru (23) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0 + *^T \overset{n-2}{\omega} \wedge \vec{x}' = *^T * \vec{v}_0 + *^T \overset{n-2}{\omega} \wedge \vec{x}' = \\ &= *^T \left(* \vec{v}_0 + \overset{n-2}{\omega} \wedge \vec{x}' \right) \end{aligned} \tag{25}$$

Często będziemy opisywać przypadki, w których $\vec{v}_0 = 0$. Dla takich przypadków wzór (23) ma prostszą postać:

$$\vec{v} = *^T \overset{n-2}{\omega} \wedge \vec{x}' \tag{26}$$

Zauważmy, że dla każdego elementu $\vec{x}'$ przestrzeni n wymiarowej $\vec{x}' \in E^n$ mamy:

$$\overset{n-2}{\omega} \to \frac{d\vec{x}}{dt} \equiv *^T \overset{n-2}{\omega} \wedge \vec{x}' \tag{27}$$

Zapiszmy wyniki działania izomorfizmu $*^T$ na wersorach bazowych dwuwektorów z przestrzeni sześciowymiarowej $\overset{2}{e}_i \in \wedge^2 E^4$:

$$\begin{aligned}
*^T \left(\overset{2}{e}_1 \wedge \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right) &= *^T \left(e_1 \wedge e_4 \wedge \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right) = -x_2 e_3 + x_3 e_2 \\
*^T \left(\overset{2}{e}_2 \wedge \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right) &= *^T \left(e_2 \wedge e_4 \wedge \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right) = x_1 e_3 - x_3 e_1 \\
*^T \left(\overset{2}{e}_3 \wedge \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right) &= *^T \left(e_3 \wedge e_4 \wedge \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right) = -x_1 e_2 + x_2 e_1 \\
*^T \left(\overset{2}{e}_4 \wedge \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right) &= *^T \left(e_1 \wedge e_2 \wedge \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right) = -x_3 e_4 + x_4 e_3 \\
*^T \left(\overset{2}{e}_5 \wedge \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right) &= *^T \left(e_1 \wedge e_3 \wedge \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right) = x_2 e_4 - x_4 e_2 \\
*^T \left(\overset{2}{e}_6 \wedge \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right) &= *^T \left(e_2 \wedge e_3 \wedge \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right) = -x_1 e_4 + x_4 e_1
\end{aligned} \tag{28}$$

Bazą przestrzeni dwuwektorów $\wedge^2 E^4$ jest zbiór: $\left\{ \overset{2}{e}_1, \overset{2}{e}_2, \overset{2}{e}_3, \overset{2}{e}_4, \overset{2}{e}_5, \overset{2}{e}_6 \right\}$

, gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
\overset{2}{e}_1 &\equiv e_1 \wedge e_4 \\
\overset{2}{e}_2 &\equiv e_2 \wedge e_4 \\
\overset{2}{e}_3 &\equiv e_3 \wedge e_4 \\
\overset{2}{e}_4 &\equiv e_1 \wedge e_2 \\
\overset{2}{e}_5 &\equiv e_1 \wedge e_3 \\
\overset{2}{e}_6 &\equiv e_2 \wedge e_3
\end{aligned} \tag{29}$$

W przestrzeni $\wedge^{n-2} E^4$ wprowadźmy jeszcze strukturę euklidesową przyjmując następującą definicję iloczynu skalarnego:

$$\underset{\vec{x} \in \wedge^{n-2} E^n \wedge \vec{y} \in \wedge^{n-2} E^n}{\forall} (\vec{x} \mid \vec{y}) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} x_i y_i \tag{30}$$

, gdzie:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} x_i \overset{n-2}{e}_i \\ \vec{y} &= \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} y_i \overset{n-2}{e}_i \end{aligned} \tag{31}$$

Norma wyznaczona przez iloczyn skalarny ma postać:

$$\|\vec{x}\| = (\vec{x} \mid \vec{x}) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} x_i^{\,2} \tag{32}$$

4.2 MOMENT PĘDU W PRZESTRZENI CZTEROWYMIAROWEJ

Przyjmiemy następującą definicję momentu pędu $\overset{n-2}{J} \in \wedge^{n-2} E^n$:

$$\overset{n-2}{J} \equiv *\sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \wedge m_i \vec{v}_i = *\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i \wedge \vec{v}_i \tag{33}$$

Wykorzystując uprzednio uzyskane równania mamy:

$$\begin{aligned}
\overset{n-2}{J} &= *\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i \wedge \vec{v}_i = *\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{x}_0 + \vec{x}'_i\right) \wedge \left(\vec{v}_0 + *^T \overset{2}{\omega} \wedge \vec{x}_i'\right) = \\
&= *\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}'_i \wedge \vec{v}_0 + *\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_0 \wedge *^T \overset{2}{\omega} \wedge \vec{x}_i' + *\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}'_i \wedge *^T \overset{2}{\omega} \wedge \vec{x}_i' = \\
&= *M\vec{R} \wedge \vec{v}_0 + *M\vec{x}_0 \wedge *^T \overset{2}{\omega} \wedge \vec{R}' + *\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}'_i \wedge *^T \overset{2}{\omega} \wedge \vec{x}_i'
\end{aligned} \tag{34}$$

, gdzie przyjęto:

$$\begin{aligned}
M &\equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \\
\vec{R} &\equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i \\
\vec{R}' &\equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}'_i
\end{aligned} \tag{35}$$

Zakładając, że wektory $\vec{R}$ i $\vec{v}_0$ są współosiowe, $\vec{R}' = 0$ i przyjmując $n = 4$ otrzymujemy wzór na moment pędu w postaci:

$$\overset{2}{J} = *\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}'_i \wedge *^T \overset{2}{\omega} \wedge \vec{x}_i' \tag{36}$$

Wykorzystując wzory (28) obliczmy składowe momentu pędu $\overset{2}{J}$ dla $\overset{2}{\omega} = \omega_1 \overset{2}{e_1}' = \omega_1 e_1' \wedge e_4'$ i $\vec{x}_i' = x_{2,i}' e_2' + x_{3,i}' e_3'$[3]:

$$\begin{aligned}
\overset{2}{J}_{1,4} &= *\sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_{2,i}' e_2' + x_{3,i}' e_3'\right) \wedge *^T \omega_1 \overset{2}{e_1} \wedge \left(x_{2,i}' e_2' + x_{3,i}' e_3'\right) = \\
&= *\sum_{i=1}^{N} m_i \omega_1 \left(x_{2,i}' e_2' + x_{3,i}' e_3'\right) \wedge \left(- x_{2,i}' e_3' + x_{3,i}' e_2'\right) = \\
&= *\sum_{i=1}^{N} m_i \omega_1 \left(\left(x_{2,i}'\right)^2 + \left(x_{3,i}'\right)^2\right) e_2' \wedge e_3' = \sum_{i=1}^{N} m_i \omega_1 \left(\left(x_{2,i}'\right)^2 + \left(x_{3,i}'\right)^2\right) e_1' \wedge e_4'
\end{aligned} \tag{37}$$

[3] Odległość w kierunkach prostopadłych do osi obrotów.

Zauważmy, że lewa strona równania jest dwuwektorem, a po prawej stronie mamy również dwuwektor, którym jest prędkość kątowa.

Zatem można zapisać:

$$\overset{2}{J} := I\,\overset{2}{\omega} \tag{38}$$

, gdzie I jest symetrycznym operatorem liniowym (lub tensorem bezwładności) przeprowadzającym dwuwektor $\overset{2}{\omega}$ w dwuwektor $\overset{2}{J}$.

Ogólniej w przestrzeni n wymiarowej mamy:

$$\overset{n-2}{J} := I\,\overset{n-2}{\omega} \tag{39}$$

W postaci macierzowej operator I w bazie $\left\{\overset{2}{e_1},\overset{2}{e_2},\overset{2}{e_3},\overset{2}{e_4},\overset{2}{e_5},\overset{2}{e_6}\right\}$ daje się zapisać jako $I_{i,j}$ gdzie $i \in \left\{1,2,\ldots,\binom{n}{n-2}\right\} \equiv N_{n-2} \wedge j \in N_{n-2} = N_2$.

Przy wprowadzonych oznaczeniach składowa momentu pędu $\overset{2}{J_i}$ wyraża się za pomocą ogólnego wzoru:

$$\begin{aligned} \overset{2}{J} &= \sum_{i=1}^{6} J_i \overset{2}{e_i} = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} I_{i,j}\,\omega_j \overset{2}{e_j} = \sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{6} I_{j,i}\,\omega_i \overset{2}{e_i} = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} I_{j,i}\,\omega_i \overset{2}{e_i} \\ J_i &= \sum_{j=1}^{6} I_{j,i}\,\omega_i \end{aligned} \tag{40}$$

, albo ogólniej:

$$\begin{aligned} \overset{n-2}{J} &= \sum_{i=1}^{N_{n-2}} J_i \overset{n-2}{e_i} = \sum_{i=1}^{N_{n-2}}\sum_{j=1}^{N_{n-2}} I_{i,j}\,\omega_j \overset{n-2}{e_j} = \sum_{j=1}^{N_{n-2}}\sum_{i=1}^{N_{n-2}} I_{j,i}\,\omega_i \overset{n-2}{e_i} = \sum_{i=1}^{N_{n-2}}\sum_{j=1}^{N_{n-2}} I_{j,i}\,\omega_i \overset{n-2}{e_i} \\ J_i &= \sum_{j=1}^{N_{n-2}} I_{j,i}\,\omega_i \end{aligned} \tag{41}$$

Analogicznie do przypadku trójwymiarowego, dwuwektory bazy, w której operator I jest diagonalny będziemy nazywali płaszczyznami głównymi momentów bezwładności. Momenty bezwładności względem tych płaszczyzn nazwiemy głównymi momentami bezwładności i oznaczymy $I_{N_{n-2}}$.

Korzystając z wprowadzonego zapisu dla dwuwektorów bazy mamy dla prędkości kątowej:

$$\overset{2}{\omega} = \left(e_2 \,|\, \frac{de_3}{dt}\right)\overset{2}{e_1} + \left(e_3 \,|\, \frac{de_1}{dt}\right)\overset{2}{e_2} + \left(e_1 \,|\, \frac{de_2}{dt}\right)\overset{2}{e_3} + \left(e_3 \,|\, \frac{de_4}{dt}\right)\overset{2}{e_4} + \left(e_4 \,|\, \frac{de_2}{dt}\right)\overset{2}{e_5} + \left(e_1 \,|\, \frac{de_4}{dt}\right)\overset{2}{e_6} \tag{42}$$

Porównując prędkość kątową w przestrzeni czterowymiarowej z prędkością kątową w przestrzeni trójwymiarowej:

$$\vec{\omega}=\left(e_3\,|\,\frac{de_2}{dt}\right)e_1+\left(e_1\,|\,\frac{de_3}{dt}\right)e_2+\left(e_2\,|\,\frac{de_1}{dt}\right)e_3 \qquad \textbf{(43)}$$

, stwierdzamy, że odpowiednie składowe dwuwektora $\overset{2}{\omega}$ prędkości kątowej mogą być utożsamiane ze składowymi wektora prędkości. Bezpośrednio z wzorów (42) i (43) otrzymujemy:

$$\overset{2}{\omega}=-\omega_1\overset{2}{e}_1-\omega_2\overset{2}{e}_2-\omega_3\overset{2}{e}_3+\left(e_3\,|\,\frac{de_4}{dt'}\right)\overset{2}{e}_4+\left(e_4\,|\,\frac{de_2}{dt'}\right)\overset{2}{e}_5+\left(e_1\,|\,\frac{de_4}{dt'}\right)\overset{2}{e}_6 \qquad \textbf{(44)}$$

, oraz:

$$\overset{2}{\omega}=-\omega_1\overset{2}{e}_1-\omega_2\overset{2}{e}_2-\omega_3\overset{2}{e}_3+\omega_4\overset{2}{e}_4+\omega_5\overset{2}{e}_5+\omega_6\overset{2}{e}_6 \qquad \textbf{(45)}$$

, gdzie:

$$\begin{aligned}\omega_4&=\left(e_3\,|\,\frac{de_4}{dt'}\right)\\ \omega_5&=\left(e_4\,|\,\frac{de_2}{dt'}\right)\\ \omega_6&=\left(e_1\,|\,\frac{de_4}{dt'}\right)\end{aligned} \qquad \textbf{(46)}$$

Zatem z wzoru (45) wynika, że składowe dwuwektora prędkości są obrotami w płaszczyznach rozpiętych na dopełnieniach dwuwektorów bazowych. Rozważmy, jako przykład składową $\overset{2}{e}_1$ dwuwektora prędkości $\overset{2}{\omega}$, którą jak wynika ze wzoru (45) jest $-\omega_1$. Oznacza to, że mamy do czynienia z obrotami w płaszczyźnie rozpiętej na wektorach $L(e_2, e_3)$. Podprzestrzenią niezmienniczą tych obrotów jest podprzestrzeń rozpięta na wektorach $L(e_1, e_4)$, czyli tych samych, które tworzą dwuwektor bazowy $\overset{2}{e}_1$ podprzestrzeni $\wedge^{n-2} E^n$, gdzie $n=4$.

Porównując z kolei momenty bezwładności I_i z ich odpowiednikami trójwymiarowymi, będziemy mieli:

$$\begin{aligned}I_1&=I_{1,1}=I_{14,14}=I_1^{(3d)}\\ I_2&=I_{24,24}=I_2^{(3d)}\\ I_3&=I_{34,34}=I_3^{(3d)}\end{aligned} \qquad \textbf{(47)}$$

Zatem moment pędu w płaszczyznach głównych $\left\{\overset{2}{e}'_{N_{n-2}}\right\}$ momentu bezwładności ma postać:

$$\begin{aligned}\overset{2}{J}&=\overset{2}{I}\,\overset{2}{\omega}=\\ &=-I_1\omega_1\overset{2}{e}'_1-I_2\omega_2\overset{2}{e}'_2-I_3\omega_3\overset{2}{e}'_3+I_4\,\omega_4\overset{2}{e}'_4+I_5\,\omega_5\overset{2}{e}'_5+I_6\,\omega_6\overset{2}{e}'_6\end{aligned} \qquad \textbf{(48)}$$

Jeżeli moment pędu jest dwuwektorem, to jego pochodna po czasie utożsamiana z momentem siły jest również dwuwektorem:

$$\frac{d\overset{2}{J}}{dt} = \overset{2}{D} \qquad \textbf{(49)}$$

Ogólniej dla przestrzeni n wymiarowej:

$$\frac{d\overset{n-2}{J}}{dt} = \overset{n-2}{D} \qquad \textbf{(50)}$$

Aby obliczyć pochodną po czasie dwuwektora przy przejściu do układu Θ' wykorzystamy wzór (20), który po podstawieniu $P_0 = P'_0$ przybiera postać:

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_{\{e_1,e_2,e_3,e_4\}} = \left(\frac{d\vec{x}'}{dt} + *^T \overset{2}{\omega} \wedge \vec{x}\right)_{\{e'_1,e'_2,e'_3,e'_4\}} \qquad \textbf{(51)}$$

Transformacja pochodnej po czasie dwuwektora $\overset{2}{u}$ do układu Θ' ma postać:

$$\frac{d\overset{2}{u}}{dt} = \frac{d\left(\sum_{i=1}^{6} u'_i \overset{2}{e'}_i\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{6} \frac{d u'_i}{dt} \overset{2}{e'}_i + \sum_{i=1}^{6} u'_i \frac{d\overset{2}{e'}_i}{dt} \qquad \textbf{(52)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\overset{2}{e'}_1}{dt} &= \frac{d(e'_1 \wedge e'_4)}{dt} = \frac{de'_1}{dt} \wedge e'_4 + e'_1 \wedge \frac{de'_4}{dt} = \\ &= *^T\left(\overset{2}{\omega} \wedge e'_1\right) \wedge e'_4 + e'_1 \wedge *^T\left(\overset{2}{\omega} \wedge e'_4\right) = \overset{2}{\omega} \wedge^* \overset{2}{e'}_1 \end{aligned} \qquad \textbf{(53)}$$

, gdzie wprowadziliśmy nowy operator $\wedge^*$, który jest zdefiniowany następująco:

$$\overset{2}{u} \wedge^* (x \wedge y) \equiv *^T\left(\overset{2}{u} \wedge x\right) \wedge y + x \wedge *^T\left(\overset{2}{u} \wedge y\right) \qquad \textbf{(54)}$$

, a ogólniej:

$$\overset{n-2}{u} \wedge^* (x \wedge y) \equiv *^T\left(\overset{n-2}{u} \wedge x\right) \wedge y + x \wedge *^T\left(\overset{n-2}{u} \wedge y\right) \qquad \textbf{(55)}$$

Zatem podstawiając **(53)** do **(52)** otrzymujemy wzór transformacyjny dla pochodnej po czasie dwuwektora:

$$\left(\frac{d\overset{2}{u}}{dt}\right)_{\Theta} = \left(\sum_{i=1}^{6}\frac{d\,u'_i}{dt}\overset{2}{e'}_i + \overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{u}\right)_{\Theta'} \tag{56}$$

i ogólniej:

$$\left(\frac{d\overset{n-2}{u}}{dt}\right)_{\Theta} = \left(\sum_{i=1}^{\binom{n}{n-2}}\frac{d\,u'_i}{dt}\overset{n-2}{e'}_i + \overset{n-2}{\omega}\wedge^{*}\overset{n-2}{u}\right)_{\Theta'} \tag{57}$$

Przechodząc do układu Θ', w którym operator $\overset{2}{I}$ jest diagonalny, a jego składowe są stałe w czasie otrzymujemy z wzoru (49):

$$\begin{aligned}
\frac{d\overset{2}{J}}{dt} = \frac{d\left(\overset{2}{I}\,\overset{2}{\omega}\right)}{dt} &= -I_1\dot{\omega}_1\overset{2}{e'}_1 - I_1\omega_1\overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{e'}_1 - I_2\dot{\omega}_2\overset{2}{e'}_2 + \\
&- I_2\omega_2\overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{e'}_2 - I_3\dot{\omega}_3\overset{2}{e'}_3 - I_3\omega_3\overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{e'}_3 + \\
&+ I_4\dot{\omega}_4\overset{2}{e'}_4 + I_4\omega_4\overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{e'}_4 + I_5\dot{\omega}_5\overset{2}{e'}_5 + \\
&+ I_5\omega_5\overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{e'}_5 + I_6\dot{\omega}_6\overset{2}{e'}_6 + I_6\omega_6\overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{e'}_6
\end{aligned} \tag{58}$$

, lub ogólniej:

$$\frac{d\overset{n-2}{J}}{dt} = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} -I_i\dot{\omega}_i\overset{n-2}{e'}_i - I_i\omega_i\overset{n-2}{\omega}\wedge^{*}\overset{n-2}{e'}_i \tag{59}$$

Podstawiając za dwuwektor $\overset{2}{\omega}$ w równaniu (56) wyrażenie z równania (18) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{e'}_1 = *^{T}\left(\left(-\omega_1 e'_1\wedge e'_4 - \omega_2 e'_2\wedge e'_4 - \omega_3 e'_3\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_2 + \omega_5 e'_1\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_3\right)\wedge e'_1\right)\wedge e'_4 + \\
&e'_1\wedge *^{T}\left(\left(-\omega_1 e'_1\wedge e'_4 - \omega_2 e'_2\wedge e'_4 - \omega_3 e'_3\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_2 + \omega_5 e'_1\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_3\right)\wedge e'_4\right) = \\
&= -\omega_2 e'_3\wedge e'_4 + \omega_3 e'_2\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_3 - \omega_5 e'_1\wedge e'_2 = -\omega_2\overset{2}{e'}_3 + \omega_3\overset{2}{e'}_2 + \omega_4\overset{2}{e'}_5 - \omega_5\overset{2}{e'}_4 \\
&\overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{e'}_2 = *^{T}\left(\left(-\omega_1 e'_1\wedge e'_4 - \omega_2 e'_2\wedge e'_4 - \omega_3 e'_3\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_2 + \omega_5 e'_1\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_3\right)\wedge e'_2\right)\wedge e'_4 + \\
&e'_2\wedge *^{T}\left(\left(-\omega_1 e'_1\wedge e'_4 - \omega_2 e'_2\wedge e'_4 - \omega_3 e'_3\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_2 + \omega_5 e'_1\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_3\right)\wedge e'_4\right) = \\
&= \omega_1 e'_3\wedge e'_4 - \omega_3 e'_1\wedge e'_4 + \omega_4 e'_2\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_1 = \omega_1\overset{2}{e'}_3 - \omega_3\overset{2}{e'}_1 + \omega_4\overset{2}{e'}_6 - \omega_6\overset{2}{e'}_4 \\
&\overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{e'}_3 = *^{T}\left(\left(-\omega_1 e'_1\wedge e'_4 - \omega_2 e'_2\wedge e'_4 - \omega_3 e'_3\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_2 + \omega_5 e'_1\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_3\right)\wedge e'_3\right)\wedge e'_4 + \\
&e'_3\wedge *^{T}\left(\left(-\omega_1 e'_1\wedge e'_4 - \omega_2 e'_2\wedge e'_4 - \omega_3 e'_3\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_2 + \omega_5 e'_1\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_3\right)\wedge e'_4\right) = \\
&= -\omega_1 e'_2\wedge e'_4 + \omega_2 e'_1\wedge e'_4 - \omega_5 e'_3\wedge e'_2 + \omega_6 e'_3\wedge e'_1 = -\omega_1\overset{2}{e'}_2 + \omega_2\overset{2}{e'}_1 + \omega_5\overset{2}{e'}_6 - \omega_6\overset{2}{e'}_5 \\
&\overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{e'}_4 = *^{T}\left(\left(-\omega_1 e'_1\wedge e'_4 - \omega_2 e'_2\wedge e'_4 - \omega_3 e'_3\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_2 + \omega_5 e'_1\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_3\right)\wedge e'_1\right)\wedge e'_2 + \\
&e'_1\wedge *^{T}\left(\left(-\omega_1 e'_1\wedge e'_4 - \omega_2 e'_2\wedge e'_4 - \omega_3 e'_3\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_2 + \omega_5 e'_1\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_3\right)\wedge e'_2\right) = \\
&= -\omega_2 e'_3\wedge e'_2 - \omega_6 e'_4\wedge e'_2 + \omega_1 e'_1\wedge e'_3 + \omega_5 e'_1\wedge e'_4 = \omega_2\overset{2}{e'}_6 + \omega_6\overset{2}{e'}_2 + \omega_1\overset{2}{e'}_5 + \omega_5\overset{2}{e'}_1 \\
&\overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{e'}_5 = *^{T}\left(\left(-\omega_1 e'_1\wedge e'_4 - \omega_2 e'_2\wedge e'_4 - \omega_3 e'_3\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_2 + \omega_5 e'_1\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_3\right)\wedge e'_1\right)\wedge e'_3 + \\
&e'_1\wedge *^{T}\left(\left(-\omega_1 e'_1\wedge e'_4 - \omega_2 e'_2\wedge e'_4 - \omega_3 e'_3\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_2 + \omega_5 e'_1\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_3\right)\wedge e'_3\right) = \\
&= \omega_3 e'_2\wedge e'_3 - \omega_6 e'_4\wedge e'_3 - \omega_1 e'_1\wedge e'_2 - \omega_4 e'_1\wedge e'_4 = \omega_3\overset{2}{e'}_6 + \omega_6\overset{2}{e'}_3 - \omega_1\overset{2}{e'}_4 - \omega_4\overset{2}{e'}_1 \\
&\overset{2}{\omega}\wedge^{*}\overset{2}{e'}_6 = *^{T}\left(\left(-\omega_1 e'_1\wedge e'_4 - \omega_2 e'_2\wedge e'_4 - \omega_3 e'_3\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_2 + \omega_5 e'_1\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_3\right)\wedge e'_2\right)\wedge e'_3 + \\
&e'_2\wedge *^{T}\left(\left(-\omega_1 e'_1\wedge e'_4 - \omega_2 e'_2\wedge e'_4 - \omega_3 e'_3\wedge e'_4 + \omega_4 e'_1\wedge e'_2 + \omega_5 e'_1\wedge e'_3 + \omega_6 e'_2\wedge e'_3\right)\wedge e'_3\right) = \\
&= -\omega_3 e'_1\wedge e'_3 + \omega_5 e'_4\wedge e'_3 + \omega_2 e'_2\wedge e'_1 - \omega_4 e'_2\wedge e'_4 = -\omega_3\overset{2}{e'}_5 - \omega_5\overset{2}{e'}_3 - \omega_2\overset{2}{e'}_4 - \omega_4\overset{2}{e'}_2
\end{aligned} \tag{60}$$

Zatem ostatecznie:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overset{2}{J}}{dt} = \frac{d\left(\overset{2}{I}\,\overset{2}{\omega}\right)}{dt} = & -I_1\dot{\omega}_1\,\overset{2}{e}'_1 - I_1\omega_1\left(-\omega_2\,\overset{2}{e}'_3 + \omega_3\,\overset{2}{e}'_2 + \omega_4\,\overset{2}{e}'_5 - \omega_5\,\overset{2}{e}'_4\right) + \\
& - I_2\dot{\omega}_2\,\overset{2}{e}'_2 - I_2\omega_2\left(\omega_1\,\overset{2}{e}'_3 - \omega_3\,\overset{2}{e}'_1 + \omega_4\,\overset{2}{e}'_6 - \omega_6\,\overset{2}{e}'_4\right) + \\
& - I_3\dot{\omega}_3\,\overset{2}{e}'_3 - I_3\omega_3\left(-\omega_1\,\overset{2}{e}'_2 + \omega_2\,\overset{2}{e}'_1 + \omega_5\,\overset{2}{e}'_6 - \omega_6\,\overset{2}{e}'_5\right) + \\
& + I_4\,\dot{\omega}_4\,\overset{2}{e}'_4 + I_4\,\omega_4\left(\omega_2\,\overset{2}{e}'_6 + \omega_6\,\overset{2}{e}'_2 + \omega_1\,\overset{2}{e}'_5 + \omega_5\,\overset{2}{e}'_1\right) + \\
& + I_5\,\dot{\omega}_5\,\overset{2}{e}'_5 + I_5\,\omega_5\left(\omega_3\,\overset{2}{e}'_6 + \omega_6\,\overset{2}{e}'_3 - \omega_1\,\overset{2}{e}'_4 - \omega_4\,\overset{2}{e}'_1\right) + \\
& + I_6\,\dot{\omega}_6\,\overset{2}{e}'_6 + I_6\,\omega_6\left(-\omega_3\,\overset{2}{e}'_5 - \omega_5\,\overset{2}{e}'_3 - \omega_2\,\overset{2}{e}'_4 - \omega_4\,\overset{2}{e}'_2\right) = \\
& + \left(-I_1\dot{\omega}_1 + I_2\omega_2\omega_3 - I_3\omega_3\omega_2 + I_4\,\omega_4\omega_5 - I_5\,\omega_5\omega_4\right)\overset{2}{e}'_1 + \\
& + \left(-I_2\dot{\omega}_2 - I_1\omega_1\omega_3 + I_3\omega_3\omega_1 + I_4\,\omega_4\omega_6 - I_6\,\omega_6\omega_4\right)\overset{2}{e}'_2 + \\
& + \left(-I_3\dot{\omega}_3 + I_1\omega_1\omega_2 - I_2\omega_2\omega_1 + I_5\,\omega_5\omega_6 - I_6\,\omega_6\omega_5\right)\overset{2}{e}'_3 + \\
& + \left(\overset{2}{I}_4\,\dot{\omega}_4 + I_1\omega_1\omega_5 + I_2\omega_2\omega_6 - I_5\,\omega_5\omega_1 - I_6\,\omega_6\omega_2\right)\overset{2}{e}'_4 + \\
& + \left(\overset{2}{I}_5\,\dot{\omega}_5 - I_1\omega_1\omega_4 + I_3\omega_3\omega_6 + I_4\,\omega_4\omega_1 - I_6\,\omega_6\omega_3\right)\overset{2}{e}'_5 + \\
& + \left(\overset{2}{I}_6\,\dot{\omega}_6 - I_2\omega_2\omega_4 - I_3\omega_3\omega_5 + I_4\,\omega_4\omega_2 + I_5\,\omega_5\omega_3\right)\overset{2}{e}'_6
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Równania Eulera w przestrzeni czterowymiarowej mają więc postać:

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + \left(I_4 - I_5\right)\omega_4\omega_5 - D_1 \\
I_2\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 + \left(I_4 - I_6\right)\omega_4\omega_6 - D_2 \\
I_3\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + \left(I_5 - I_6\right)\omega_5\omega_6 - D_3 \\
I_4\,\dot{\omega}_4 &= \left(I_5 - I_1\right)\omega_1\omega_5 + \left(I_6 - I_2\right)\omega_2\omega_6 + D_4 \\
I_5\,\dot{\omega}_5 &= \left(I_1 - I_4\right)\omega_1\omega_4 + \left(I_6 - I_3\right)\omega_3\omega_6 + D_5 \\
I_6\,\dot{\omega}_6 &= \left(I_2 - I_4\right)\omega_2\omega_4 + \left(I_3 - I_5\right)\omega_3\omega_5 + D_6
\end{aligned}
\tag{62}
$$

W przypadku, gdy wszystkie składowe momentu siły są równe zeru mamy mnożąc odpowiednio przez $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$:

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1\omega_1 &= (I_2 - I_3)\omega_1\omega_2\omega_3 + \left(I_4 - I_5\right)\omega_1\omega_4\omega_5 \\
I_2\dot{\omega}_2\omega_2 &= (I_3 - I_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + \left(I_4 - I_6\right)\omega_2\omega_4\omega_6 \\
I_3\dot{\omega}_3\omega_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2\omega_3 + \left(I_5 - I_6\right)\omega_3\omega_5\omega_6 \\
I_4\,\dot{\omega}_4\omega_4 &= \left(I_5 - I_1\right)\omega_1\omega_4\omega_5 + \left(I_6 - I_2\right)\omega_2\omega_4\omega_6 \\
I_5\,\dot{\omega}_5\omega_5 &= \left(I_1 - I_4\right)\omega_1\omega_4\omega_5 + \left(I_6 - I_3\right)\omega_3\omega_5\omega_6 \\
I_6\,\dot{\omega}_6\omega_6 &= \left(I_2 - I_4\right)\omega_2\omega_4\omega_6 + \left(I_3 - I_5\right)\omega_3\omega_5\omega_6
\end{aligned}
\tag{63}
$$

$$I_1\dot{\omega}_1\omega_1 + I_2\dot{\omega}_2\omega_2 + I_3\dot{\omega}_3\omega_3 + I_4\dot{\omega}_4\omega_4 + I_5\dot{\omega}_5\omega_5 + I_6\dot{\omega}_6\omega_6 = \tag{64}$$

, co daje ostatecznie:

$$\frac{d}{dt}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 + I_4\omega_4^2 + I_5\omega_5^2 + I_6\omega_6^2 \right) = 0 \tag{65}$$

Równanie to prowadzi do prawa zachowania energii kinetycznej kanałów przestrzennych:

$$\frac{J_1^2}{I_1} + \frac{J_2^2}{I_2} + \frac{J_3^2}{I_3} + \frac{J_4^2}{I_4} + \frac{J_5^2}{I_5} + \frac{J_6^2}{I_6} = const \tag{66}$$

Ogólniej:

$$\sum_{i=1}^{N_{n-2}} \frac{J_i^2}{I_i} = const \tag{67}$$

Mnożąc z kolei odpowiednio przez $I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3, I_4\omega_4, I_5\omega_5, I_6\omega_6$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
I_1^2\dot{\omega}_1\omega_1 &= I_1(I_2 - I_3)\omega_1\omega_2\omega_3 + I_1\left(I_4 - I_5 \right)\omega_1\omega_4\omega_5 \\
I_2^2\dot{\omega}_2\omega_2 &= I_2(I_3 - I_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + I_2\left(I_4 - I_6 \right)\omega_2\omega_4\omega_6 \\
I_3^2\dot{\omega}_3\omega_3 &= I_3(I_1 - I_2)\omega_1\omega_2\omega_3 + I_3\left(I_5 - I_6 \right)\omega_3\omega_5\omega_6 \\
I_4^2\dot{\omega}_4\omega_4 &= I_4\left(I_5 - I_1 \right)\omega_1\omega_4\omega_5 + I_4\left(I_6 - I_2 \right)\omega_2\omega_4\omega_6 \\
I_5^2\dot{\omega}_5\omega_5 &= I_5\left(I_1 - I_4 \right)\omega_1\omega_4\omega_5 + I_5\left(I_6 - I_3 \right)\omega_3\omega_5\omega_6 \\
I_6^2\dot{\omega}_6\omega_6 &= I_6\left(I_2 - I_4 \right)\omega_2\omega_4\omega_6 + I_6\left(I_3 - I_5 \right)\omega_3\omega_5\omega_6
\end{aligned} \tag{68}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$I_1^2\dot{\omega}_1\omega_1 + I_2^2\dot{\omega}_2\omega_2 + I_3^2\dot{\omega}_3\omega_3 + I_4^2\dot{\omega}_4\omega_4 + I_5^2\dot{\omega}_5\omega_5 + I_6^2\dot{\omega}_6\omega_6 = 0 \tag{69}$$

, co daje

$$\frac{d}{dt}\left(I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 + I_4^2\omega_4^2 + I_5^2\omega_5^2 + I_6^2\omega_6^2 \right) = 0 \tag{70}$$

Powyższe równanie prowadzi do prawa zachowania momentu pędu dla kanałów przestrzennych:

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + J_4^2 + J_5^2 + J_6^2 = const \tag{71}$$

, a ogólniej:

$$\sum_{i=1}^{N_{n-2}} J_i^{\,2} = const \qquad \textbf{(72)}$$

4.3 KANAŁ PRZESTRZENNY W SPOCZYNKU

Uwzględniając symetrię kanału przestrzennego, a właściwie zakładając, że kanał przestrzenny takową posiada przyjmiemy następujące równości:

$$I_{\breve{S}} \equiv I_1 = I_2 = I_3 \tag{73}$$

, oraz

$$I_{\breve{W}} \equiv I_4 = I_5 = I_6 \tag{74}$$

Podobne założenie zrobimy odnośnie odpowiednich prędkości kątowych:

$$\begin{aligned} \omega_{\breve{S}} &\equiv \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \\ \omega_{\breve{W}} &\equiv \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 \end{aligned} \tag{75}$$

Zatem bezpośrednio z wzoru **(48)** mamy uproszczony wzór na moment pędu kanału przestrzennego:

$$\overset{2}{J} = \overset{2}{I}\,\overset{2}{\omega} = -I_{\breve{S}}\omega_{\breve{S}}\left(\overset{2}{e_1} + \overset{2}{e_2} + \overset{2}{e_3}\right) + I_{\breve{W}}\omega_{\breve{W}}\left(\overset{2}{e_4} + \overset{2}{e_5} + \overset{2}{e_6}\right) \tag{76}$$

W przypadku kanału przestrzennego ortogonalnego do hiperpowierzchni brzegowych dodatkowo przyjmiemy, że:

$$\omega_{\breve{W}} = 0 \tag{77}$$

Po podstawieniu do wzoru na moment pędu otrzymujemy:

$$\overset{2}{J} = \overset{2}{I}\,\overset{2}{\omega} = -I_{\breve{S}}\omega_{\breve{S}}\left(\overset{2}{e_1} + \overset{2}{e_2} + \overset{2}{e_3}\right) \tag{78}$$

Interesujący jest przypadek, w którym kanał przestrzenny będący w spoczynku ma tylko i wyłącznie jedną składową momentu pędu na przykład składową $e_1 \wedge e_4$:

$$\overset{2}{J}_{\breve{S}} = -I_{\breve{S}}\omega_1 e_1 \wedge e_4 \tag{79}$$

Otóż okazuje się, że tego typu kanał przestrzenny charakteryzuje się ruchem obrotowym wokół osi e_4 ale również wokół osi e_1. Przy czym obroty wokół osi e_1 są w fizyce trójwymiarowej powiązane ze spinem.

Ponadto zauważmy, że istnieją dokładnie trzy orientacje kanału przestrzennego, w których zachodzą obroty wokół osi e_4. Czyżby kwarki były kanałami przestrzennymi o takich właśnie orientacjach? Na to pytanie odpowiemy w kolejnych rozdziałach.